แนวข้อสอบชุดที่ 4

นิยามเบื้องต้น

ปริภูมิเวกเตอร์

กำหนดให้ $V \neq \varnothing$ และ F เป็นฟิลด์

กำหนดการดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การดำเนินการบน V เรียกว่า**การบวก** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การดำเนินการบน V และ F เรียกว่า**การคูณด้วยสเกลาร์** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V และสเกลาร์ใน F มาคูณกัน

จะเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บน F ก็ต่อเมื่อการดำเนินการทั้งสองสอดคล้องกับสัจพจน์ 10 ข้อต่อไปนี้

1. $\overline{u} + \overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v} \in V$
2. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$ สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v} \in V$
3. $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$ สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$
4. มี $\overline{0}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\overline{0} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$ สำหรับทุก $\overline{u} \in V$
5. สำหรับแต่ละ $\overline{u}$ ใน V จะมี $-\overline{u}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\overline{u} + (-\overline{u}) = (-\overline{u}) + \overline{u} = \overline{0}$
6. $k\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $k \in F, \overline{u} \in V$
7. $k(\overline{u} + \overline{v}) = k\overline{u} + k\overline{v}$
8. $(k + m)\overline{u} = k\overline{u} + m\overline{u}$
9. $(km)\overline{u} = k(m\overline{u})$
10. $1\overline{u} = \overline{u}$

1. ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) และปริภูมิย่อย (subspace)

   1.1. กำหนดให้ $V = \mathbb{R}^3$ และถ้า $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in V,\ k \in \mathbb{R}$ จะนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ ดังนี้

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, x_2, x_3)$$

จงตรวจสอบว่า V ที่กำหนดให้ พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน (2.5 คะแนน)

1.2 กำหนดให้ W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อย (subspaces) ของปริภูมิเวกเตอร์ V

กำหนด $W_1 + W_2 = \{\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \mid \bar{w}_1 \in W_1, \bar{w}_2 \in W_2\}$

จงแสดงว่า $W_1 + W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V (2.5 คะแนน)

2. กำหนด $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ให้ $S = \{M_1, M_2, M_3\}$ และ $W = span(S)$ แล้ว

2.1. จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ (1.5 คะแนน)

2.2. จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ใน S หรือไม่

ถ้าเป็นจงเขียน A ในรูปการรวมเชิงเส้นของ M_1, M_2 และ M_3 (1.5 คะแนน)

2.3. จงแสดงว่าสมาชิกทั้งหมดของ W เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด 2×2 **(2 คะแนน)**

3. ฐานหลัก (basis) และมิติ (dimension)

3.1 จงแสดงว่า ถ้า $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว $\{\overline{u} + \overline{v}, \overline{u} + \overline{w}, \overline{v} + \overline{w}\}$ จะเป็นฐานหลัก (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ V ด้วย (2.5 คะแนน)

3.2 กำหนดให้ $P_n(x)$ **คือพหุนามดีกรีไม่เกิน** n **และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง**

ให้ $W = \{p \in P_2(x) \mid p(1) = 0\}$ **จงแสดงว่า** $Dim(W) = 2$ **(2.5 คะแนน)**

4. Row Space, Column Space, and Null space

4.1. กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าใช้การดำเนินการตามแถว (Row Operations) โดยไม่ใช้การสลับแถว เพื่อหาฐานหลักของปริภูมิแบบต่างๆ จงตอบคำถามต่อไปนี้ **(เติมเฉพาะคำตอบ ที่ว่างสามารถทดได้)** (2 คะแนน)

(1.) ฐานหลัก (basis) ของ column space ของ A คือ

(2.) ฐานหลัก (basis) ของ row space ของ A คือ
(ให้ตอบในรูปเวกเตอร์แถวของ A)

4.2. กำหนด B เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 5×7 และ $rank(B) = 5$

เมื่อ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_7 \end{bmatrix}^T$ เป็นเมทริกซ์ตัวแปร

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_5 \end{bmatrix}^T$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ (1.5 คะแนน)

(1.) พิจารณาผลสรุปต่อไปนี้ ข้อใดบ้างสรุปได้ถูกต้อง

(a) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องมีคำตอบเดียว

(b) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องมีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

(c) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องไม่มีคำตอบ

(d) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะมีคำตอบเดียว

(e) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะมีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

(f) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะไม่มีคำตอบ

ข้อที่สรุปได้ถูกต้องคือ

(2.) มิติ (dimension) ของ column space ของ B =

(3.) $nullity(B)$ =

4.3. จงตรวจสอบว่า $\mathbf{b}$ อยู่ใน column space ของ C หรือไม่ เมื่อกำหนด **(1.5 คะแนน)**

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

5. การแปลงเชิงเส้น

5.1. กำหนดการแปลงเชิงเส้น

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ แทนการสะท้อนกับเส้นตรง $y = -x$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ แทนการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° รอบจุดกำเนิด ตามด้วยการสะท้อนกับเส้นตรง $y = x$

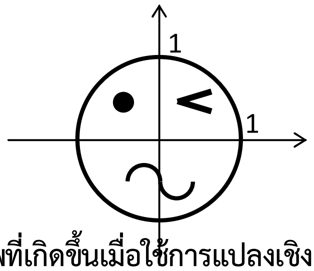
$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T_3(x,y) = (-x + y, x + 2y)$

จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T_1, T_2 และ T_3 (3 คะแนน)

(เติมเฉพาะคำตอบ ที่ว่างสามารถทดได้)

$\left[T_1\right] = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$ $\left[T_2\right] = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$ $\left[T_3\right] = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

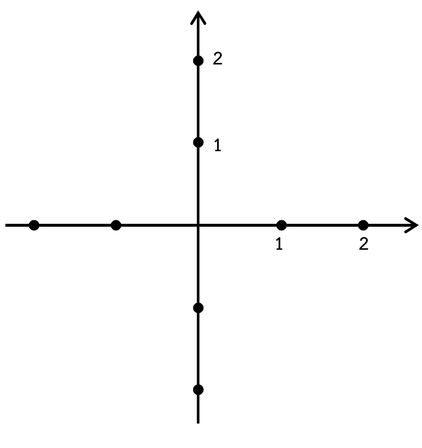
5.2. กำหนด $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ และกำหนดภาพ

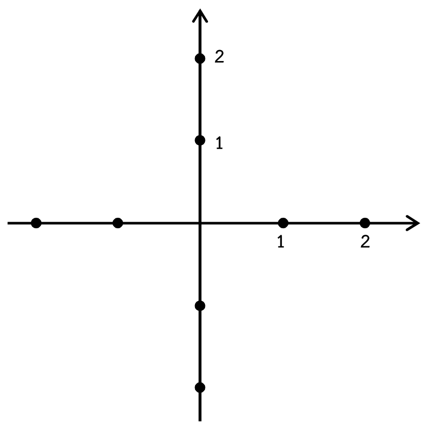


จงวาดภาพที่เกิดขึ้นเมื่อใช้การแปลงเชิงเส้น $T(\overline{x}) = A\overline{x}$ บนภาพที่กำหนดให้ (2 คะแนน)

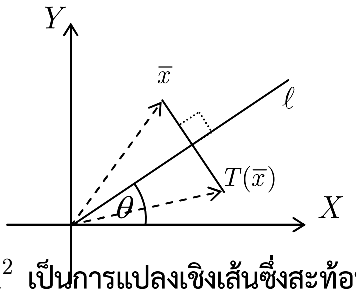
(1.) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2.) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$





6. กำหนดให้ ℓ เป็นเส้นตรงในระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด และทำมุม θ กับแกน X โดยที่ $0 \le \theta < \pi$ ดังรูป



ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งสะท้อนเวกเตอร์กับเส้นตรง ℓ

6.1 จงแสดงว่าเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลง T คือ $[T] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ **(3 คะแนน)**

6.2 จงพิสูจน์ว่า T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง และหา $[T^{-1}]$ **(2 คะแนน)**