

แนวข้อสอบชุดที่ 3

นิยามเบื้องต้น

ปริภูมิเวกเตอร์

กำหนดให้ $V \neq \emptyset$ และ F เป็นฟิลด์

กำหนดการดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การดำเนินการบน V เรียกว่าการบวกเป็นการนำเวกเตอร์ใน V มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การดำเนินการบน V และ F เรียกว่าการคูณด้วยสเกลาร์ เป็นการนำเวกเตอร์ใน V และสเกลาร์ใน F มาคูณกัน

จะเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บน F ก็ต่อเมื่อการดำเนินการทั้งสองสอดคล้องกับสัจพจน์ 10 ข้อต่อไปนี้

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$
4. มี $\bar{0}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u} \in V$
5. สำหรับแต่ละ \bar{u} ใน V จะมี $-\bar{u}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
6. $k\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $k \in F, \bar{u} \in V$
7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
8. $(k + m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$
9. $(km)\bar{u} = k(m\bar{u}) = m(k\bar{u})$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

1. กำหนดให้ $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ และ $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ถ้า T_1 เป็นการแปลงแบบการหมุนด้วยมุมขนาด 45° ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $T_2(1, 0) = (-2, 5)$ และ $T_2(0, 1) = (-1, 3)$ จงหา

1.1 เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_1 และ T_2 (1 คะแนน)

เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_1 คือ

เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_2 คือ

1.2 จงแสดงว่า $T_1 \circ T_2$ เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (2 คะแนน)

1.3 จงหา $(T_1 \circ T_2)^{-1}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2 คะแนน)

2. กำหนดให้ $V = \mathbb{R}^2$ และถ้า $(a, b), (c, d) \in V, k$ เป็นสเกลาร์ใดๆ จะนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ดังนี้
- $$(a, b) + (c, d) = (a + c - 1, b + d - 1) \text{ และ}$$
- $$k(a, b) = (a, kb)$$

2.1 จงแสดงว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวมีเอกลักษณ์การบวก (1.5 คะแนน)

2.2 ถ้า $\bar{u} = (a, b) \in V$ จงหาตัวผกผันการบวกของ \bar{u} (1.5 คะแนน)

2.3 จงตรวจสอบว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็น
จงบอกเหตุผล (2 คะแนน)

3. จงตรวจสอบว่าเซต S ที่กำหนดให้เป็นปริภูมิย่อยหรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน

3.1 $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a - d = b - c \right\}$ (2.5 คะแนน)

3.2 $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$

(2.5 คะแนน)

4. กำหนด $\bar{v}_1 = (1, 0, -2, 5), \bar{v}_2 = (0, 1, 1, 1), \bar{v}_3 = (0, -1, 1, -1), \bar{v}_4 = (1, 1, -2, 6)$

4.1 จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $\bar{u} = (1, 0, -1, 5)$ อยู่ใน $\text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$

(3 คะแนน)

4.2 จงเขียนเวกเตอร์ $\bar{u} = (1, 0, -1, 5)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$

(1 คะแนน)

4.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \bar{v}_4 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $\text{rank}(A)$

(1 คะแนน)

5. กำหนดระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ดังนี้

$$\begin{cases} 3w - 3y + 9z = 0 \\ -w + x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4w + x - 6y + 13z = 0 \end{cases}$$

จงหาฐานหลัก (Basis) และมิติ (Dimension) ของปริภูมิคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่กำหนดให้
(5 คะแนน)

6. จงแสดงว่า $S = \{1 + 2x - x^2, 2 - x + 2x^2, -1 + 8x - 3x^2\}$ เป็นฐานหลัก (Basis) ของปริภูมิ P_2 (5 คะแนน)

7. ร้านสุกี้แห่งหนึ่งมีสูตรผสมน้ำจิ้ม 3 สูตรคือ สูตรธรรมดา สูตรโบราณ สูตรโมเดิร์น โดยแต่ละสูตรจะใช้ส่วนผสมหลัก 4 ชนิด ได้แก่เกลือ กระเทียม พริกและน้ำตาล ในการทำน้ำจิ้มจะใช้ส่วนผสมแต่ละอย่างดังตาราง (หน่วยเป็น กิโลกรัมต่อน้ำจิ้มหนึ่งหน่วย)

ส่วนผสม	สูตรธรรมดา	สูตรโบราณ	สูตรโมเดิร์น
เกลือ	1	2	1
กระเทียม	2	5	5
พริก	2	5	6
น้ำตาล	3	7	7

ถ้ามีส่วนผสมแต่ละชนิดจำกัด คือมีเกลือ 16 กิโลกรัม กระเทียม 45 กิโลกรัม พริก 48 กิโลกรัมและน้ำตาล 64 กิโลกรัมจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้ส่วนผสมหมดทุกชนิดพอดีในการทำน้ำจิ้มทั้ง 3 สูตร ถ้าเป็นไปได้จะได้น้ำจิ้มชนิดละกี่หน่วย

(5 คะแนน)