แนวข้อสอบชุดที่ 1

กำหนดนิยามเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

นิยาม 1 Trace

ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ แล้ว Trace ของ A เขียนแทนด้วย $Tr(A)$ คือผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A นั่นคือ $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

นิยาม 2 เมทริกซ์มูลฐาน

เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n

นิยาม 3 เมทริกซ์ทแยงมุม

เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i \neq j$

นิยาม 4 เมทริกซ์สามเหลี่ยม

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

1. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$ หรือ $\forall i < j$
2. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$
3. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i < j$

นิยาม 5 เมทริกซ์สมมาตร)symmetric matrix)

เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร** เมื่อ $A^T = A$

นิยาม 6 ดีเทอร์มินันต์

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$

ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det$ นิยามว่า

$$\det(A) = \sum (\pm)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$$

เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1, 2, \ldots, n\}$ และมีวิธีการเลือกเครื่องหมาย $\pm$ ดังนี้

เลือก $+$ เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่

เลือก $-$ เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่

เรียก $\det(A)$ ว่าดีเทอร์มินันต์ของ A

1. **กำหนด E_1, E_2, E_3, E_4 เป็นเมทริกซ์มูลฐาน และกำหนดเมทริกซ์ A ดังนี้**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิจาณาการหา A^{-1} ดังต่อไปนี้

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & \\ 0 & 1 & 0 & I \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & E_1 I \\ 3 & 1 & 4 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & E_2 E_1 I \\ 0 & 1 & 4 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & E_3 E_2 E_1 I \\ 0 & 0 & 4 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & E_4 E_3 E_2 E_1 I \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

1.1 จงหา E_1, E_2, E_3, E_4 และ A^{-1} โดยสามารถเติมเฉพาะคำตอบ **(2.5 คะแนน)**

$$E_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1.2 จงเขียน A ให้อยู่ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานโดยแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ **(2.5 คะแนน)**

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบเพื่อหา $Tr(AB)$ (5 คะแนน)

(**หมายเหตุ** นิยามของ Trace กำหนดไว้ในหน้าที่ 2)

วิธีทำ

3. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น (แสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ 5 คะแนน)

$$\begin{cases} x + \quad\; 2z = 1 \\ 2x + y \qquad = a \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

จงใช้เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเพื่อหาค่าคงที่ a และ b ที่ทำให้ระบบสมการ

3.1 มีผลเฉลยเดียว

3.2 ไม่มีผลเฉลย

3.3 มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ พร้อมทั้งหาผลเฉลยทั่วไป

วิธีทำ

กำหนดให้ A, B **เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ** $n \times n$

L **เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างมิติ** $n \times n$

U **เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนมิติ** $n \times n$

D **เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ** $n \times n$

4. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

4.1 ถ้า $A^{-1} = A^T$ **และ** $B^{-1} = B^T$ **แล้ว** $(AB)^T(AB) = I$ **(1 คะแนน)**

พิสูจน์

4.2 ถ้า $A = LDL^T$ **และ** $B = UDU^T$ **แล้ว** A **และ** B **เป็นเมทริกซ์สมมาตร** **(1 คะแนน)**

พิสูจน์

4.3 ให้ $m, k \in \mathbb{R}$ **ถ้า** $A = LDL^T$ **และ** $B = UDU^T$ **แล้ว** $(kA + mB)^{100}$ **เป็นเมทริกซ์สมมาตร** **(3 คะแนน)**

พิสูจน์

5. จงพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

5.1 สมบัติไม่แปรเปลี่ยน (invariant property) ของฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์

"สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A, B ใดๆ ถ้า B มีตัวผกผัน แล้ว A และ $B^{-1}AB$ จะมีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากัน"

พิสูจน์ (1 คะแนน)

5.2 Sylvester's Determinant Theorem

"สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ใดๆ ที่มีตัวผกผัน $\det(X + AB) = \det(X)\det(I_n + BX^{-1}A)$"

พิสูจน์ (4 คะแนน)

6. จงเติมเฉพาะคำตอบที่ถูกต้องในช่อง $\boxed{}$

6.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{5\times5}$ **สูตรต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งของสูตรในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ** A

จงเติมเครื่องหมาย $+$ หรือ $-$ ลงในช่องว่าง **(1 คะแนน)**

$$\det(A) = \boxed{+}\, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} \boxed{}\, a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} \boxed{}\, a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53}$$

$$\boxed{}\, a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} \boxed{}\, a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} \boxed{}\, a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51} + \dots$$

6.2 กำหนดให้ $a, b, \dots, i$ **เป็นจำนวนจริงและ** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$ **จงหาค่าของ**

6.2.1 $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a-5g & b-5h & c-5i \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = \boxed{}$ **(1 คะแนน)**

6.2.2 ถ้า $\begin{vmatrix} 2kc & 2a & 2b+2c \\ 2kf & 2d & 2e+2f \\ 2ki & 2g & 2h+2i \end{vmatrix} = 240$ **แล้ว** $k = \boxed{}$ **(1 คะแนน)**

6.3 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & 8 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 7 \\ -6 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = \boxed{}$ **(0.5 คะแนน)**

$\det(A_2) = \boxed{}$ **(0.5 คะแนน)**

$\det(A_3) = \boxed{}$ **(1 คะแนน)**

7. จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{4\times 4}$ โดยที่ $M_{ij}(A)$ และ $C_{ij}(A)$ แทนไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij} ตามลำดับ ถ้า $C_{23}(A^T) = -4$ แล้ว $M_{32}(2A)$ เท่ากับเท่าใด (2 คะแนน)

วิธีทำ

7.2 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีตัวผกผัน ให้ A มีมิติ 2×2 ถ้า $adj(A) = B - B^T$ และ $\det(A) = 2$ โดยที่ $C = \det(A)\cdot B^{-1} + B^T A B^{-1}$ จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาค่า $\det(2C^T)^{-1}$ (ตอบเป็นผลสำเร็จ) (3 คะแนน)

วิธีทำ