เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 4

นิยามเบื้องต้น

ปริภูมิเวกเตอร์

กำหนดให้ $V \neq \varnothing$ และ F เป็นฟิลด์

กำหนดการดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การดำเนินการบน V เรียกว่า**การบวก** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การดำเนินการบน V และ F เรียกว่า**การคูณด้วยสเกลาร์** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V และสเกลาร์ใน F มาคูณกัน

จะเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บน F ก็ต่อเมื่อการดำเนินการทั้งสองสอดคล้องกับสัจพจน์ 10 ข้อต่อไปนี้

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$
4. มี $\bar{0}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u} \in V$
5. สำหรับแต่ละ $\bar{u}$ ใน V จะมี $-\bar{u}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
6. $k\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $k \in F, \bar{u} \in V$
7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
8. $(k + m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$
9. $(km)\bar{u} = k(m\bar{u})$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

1. ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) และปริภูมิย่อย (subspace)

1.1. กำหนดให้ $V = \mathbb{R}^3$ และถ้า $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in V,\ k \in \mathbb{R}$ จะนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ ดังนี้

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, x_2, x_3)$$

จงตรวจสอบว่า V ที่กำหนดให้ พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน (2.5 คะแนน)

แนวตอบ

ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เนื่องจากไม่สอดคล้องกับสัจพจน์ข้อที่ 8 นั่นคือ $(k+m)\overline{u} \neq k\overline{u} + m\overline{u}$ 1.5 คะแนน

(ต้องยกตัวอย่างค้านเป็นตัวเลข จึงจะได้คะแนนเต็ม)

ให้ $k = 2, m = 2, \overline{u} = (1,1,2)$

$$(k+m)\overline{u} = 4(1,1,2) = (4,1,2)$$ 1 คะแนน

$$k\overline{u} + m\overline{u} = (2,1,2) + (2,1,2) = (4,2,4)$$

1.2 กำหนดให้ W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อย (subspaces) ของปริภูมิเวกเตอร์ V

กำหนด $W_1 + W_2 = \{\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \mid \bar{w}_1 \in W_1, \bar{w}_2 \in W_2\}$

จงแสดงว่า $W_1 + W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V (2.5 คะแนน)

แนวตอบ

เห็นได้ชัดว่า $W_1 + W_2 \neq \varnothing$ เพราะว่า $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in W_1 + W_2$

จะแสดงว่า $W_1 + W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V ต้องแสดงสมบัติ 2 ข้อคือ

0.5 คะแนน

1. ถ้า $\bar{x}, \bar{y} \in W_1 + W_2$ แล้ว $\bar{x} + \bar{y} \in W_1 + W_2$ (สมบัติปิดการบวก)
2. ถ้า $\bar{x} \in W_1 + W_2$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว $k\bar{x} \in W_1 + W_2$ (สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์)

ให้ $\bar{x}, \bar{y} \in W_1 + W_2$ และ $k \in \mathbb{R}$

(1). สมบัติปิดการบวก

1 คะแนน

จะได้ $\bar{x} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ โดยที่ $\bar{w}_1 \in W_1, \bar{w}_2 \in W_2$

และ $\bar{y} = \bar{w}_1' + \bar{w}_2'$ โดยที่ $\bar{w}_1' \in W_1, \bar{w}_2' \in W_2$

พิจารณา $\bar{x} + \bar{y} = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) + (\bar{w}_1' + \bar{w}_2') = (\bar{w}_1 + \bar{w}_1') + (\bar{w}_2 + \bar{w}_2')$

เนื่องจาก W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อย จะได้ว่า $(\bar{w}_1 + \bar{w}_1') \in W_1$ และ $(\bar{w}_2 + \bar{w}_2') \in W_2$

ดั้งนั้น $\bar{x} + \bar{y} \in W_1 + W_2$

(2). สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์

จะได้ $\bar{x} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ โดยที่ $\bar{w}_1 \in W_1, \bar{w}_2 \in W_2$

1 คะแนน

พิจารณา $k\bar{x} = k(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = k\bar{w}_1 + k\bar{w}_2$

เนื่องจาก W_1 และ W_2 เป็นปริภูมิย่อย จะได้ว่า $k\bar{w}_1 \in W_1$ และ $k\bar{w}_2 \in W_2$

ดั้งนั้น $k\bar{x} \in W_1 + W_2$

ดั้งนั้น $W_1 + W_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

2. กำหนด $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ให้ $S = \{M_1, M_2, M_3\}$ และ $W = span(S)$ แล้ว

2.1. จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น หรือไม่อิสระเชิงเส้น (1 .5 คะแนน)

แนวตอบ

0.5 คะแนน

พิจารณาสมการ $k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3 = 0$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases} \text{ หรือ } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1 คะแนน

เห็นได้ชัดว่า $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ นั่นคือ $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

ดังนั้น S อิสระเชิงเส้น

2.2. จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นหรือไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ใน S

ถ้าเป็นจงเขียน A ในรูปการรวมเชิงเส้นของ M_1, M_2 และ M_3 (1.5 คะแนน)

แนวตอบ

0.5 คะแนน

พิจารณาสมการ $k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3 = A$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_3 = 3 \\ k_3 = 3 \\ k_2 = 5 \end{cases} \text{ หรือ } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

1 คะแนน

เห็นได้ชัดว่า $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ นั่นคือ $k_1 = 2, k_2 = 5, k_3 = 3$

ดังนั้น A เป็นการรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ใน S และสามารถเขียน $2M_1 + 5M_2 + 3M_3 = A$

2.3. จงแสดงว่าสมาชิกทั้งหมดของ W เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด 2×2 (2 คะแนน)

แนวตอบ

สมมติให้มีสมาชิกของ W เป็นเมทริกซ์ไม่สมมาตรที่มีขนาด 2×2

นั่นคือจะมี $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $c \neq b$ และ $A \in W$

จาก $W = span(S)$ และ $A \in W$

ดังนั้นจะมี k_1, k_2, k_3 ที่ทำให้ $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = A$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{cases} k_1 & & & = a \\ & & k_3 & = b \\ & & k_3 & = c \\ & k_2 & & = d \end{cases} \quad \text{หรือ} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & d \end{array}\right]$$

เห็นได้ชัดว่า $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{array}\right]$ นั่นคือ $k_1 = a, k_2 = d, k_3 = b, c - b = 0$

ระบบสมการจะมีคำตอบก็ต่อเมื่อ $c = b$ เกิดข้อขัดแย้งที่สมมติไว้ว่า $c \neq b$

ดังนั้นสมาชิกทั้งหมดของ W เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด 2×2

3. ฐานหลัก (basis) และมิติ (dimension)

3.1 จงแสดงว่า ถ้า $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V แล้ว $\{\overline{u}+\overline{v},\overline{u}+\overline{w},\overline{v}+\overline{w}\}$ จะเป็นฐานหลัก (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ V ด้วย (2.5 คะแนน)

แนวตอบ

ให้ $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V

จะได้ว่า $span\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=V$ และ $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

พิจารณาการดำเนินการตามคอลัมน์ ซึ่งไม่เปลี่ยนคำตอบของระบบสมการ

$$I\sim\begin{bmatrix}\overline{u} & \overline{v} & \overline{w}\end{bmatrix}\underset{1C_2+C_1}{\sim}\begin{bmatrix}\overline{u}+\overline{v} & \overline{v} & \overline{w}\end{bmatrix}\underset{1C_2+C_3}{\sim}\begin{bmatrix}\overline{u}+\overline{v} & \overline{v} & \overline{v}+\overline{w}\end{bmatrix}\underset{-2C_2}{\sim}\begin{bmatrix}\overline{u}+\overline{v} & -2\overline{v} & \overline{v}+\overline{w}\end{bmatrix}$$

$$\underset{C_1+C_2}{\sim}\begin{bmatrix}\overline{u}+\overline{v} & \overline{u}-\overline{v} & \overline{v}+\overline{w}\end{bmatrix}\underset{C_3+C_2}{\sim}\begin{bmatrix}\overline{u}+\overline{v} & \overline{u}+\overline{w} & \overline{v}+\overline{w}\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $a(\overline{u}+\overline{v})+b(\overline{u}+\overline{w})+c(\overline{v}+\overline{w})=\overline{x}$ มีคำตอบ (a,b,c) สำหรับแต่ละ $\overline{x}$ ใน V

และ $d(\overline{u}+\overline{v})+e(\overline{u}+\overline{w})+f(\overline{v}+\overline{w})=\overline{0}$ มีคำตอบเดียวคือ $(d,e,f)=(0,0,0)$

นั่นคือ $\{\overline{u}+\overline{v},\overline{u}+\overline{w},\overline{v}+\overline{w}\}$ จะเป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V

ต้องแสดงสมบัติครบทั้ง 2 ข้อ จึงจะได้คะแนนเต็ม

หรืออาจแสดงว่า

ให้ $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V

(1) จาก $span\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=V$ จะได้ว่า $k_1\overline{u}+k_2\overline{v}+k_3\overline{w}=\overline{x}$ มีคำตอบ (k_1,k_2,k_3) สำหรับแต่ละ $\overline{x}\in V$

เลือก $k_1=a+b,k_2=a+c,k_3=b+c$

$$\begin{aligned}a(\overline{u}+\overline{v})+b(\overline{u}+\overline{w})+c(\overline{v}+\overline{w})&=a\overline{u}+a\overline{v}+b\overline{u}+b\overline{w}+c\overline{v}+c\overline{w}\\&=(a\overline{u}+b\overline{u})+(a\overline{v}+c\overline{v})+(b\overline{w}+c\overline{w})\\&=k_1\overline{u}+k_2\overline{v}+k_3\overline{w}\\&=\overline{x}\end{aligned}$$

ต้องแสดงสมการนี้

$a(\overline{u}+\overline{v})+b(\overline{u}+\overline{w})+c(\overline{v}+\overline{w})=\overline{x}$ มีคำตอบ (a,b,c) สำหรับแต่ละ $\overline{x}$ ใน V

$span\{\overline{u}+\overline{v},\overline{u}+\overline{w},\overline{v}+\overline{w}\}=V$

(2) จาก $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

จะได้ว่า $m_1\overline{u}+m_2\overline{v}+m_3\overline{w}=\overline{0}$ มีคำตอบเดียวคือ $(m_1,m_2,m_3)=(0,0,0)$

เลือก $m_1=d+e,m_2=d+f,m_3=e+f$

$$\begin{aligned}d(\overline{u}+\overline{v})+e(\overline{u}+\overline{w})+f(\overline{v}+\overline{w})&=d\overline{u}+d\overline{v}+e\overline{u}+e\overline{w}+f\overline{v}+f\overline{w}\\&=(d\overline{u}+e\overline{u})+(d\overline{v}+f\overline{v})+(e\overline{w}+f\overline{w})\\&=m_1\overline{u}+m_2\overline{v}+m_3\overline{w}\\&=\overline{0}\end{aligned}$$

ต้องแสดงสมการนี้

$d(\overline{u}+\overline{v})+e(\overline{u}+\overline{w})+f(\overline{v}+\overline{w})=\overline{0}$ มีคำตอบเดียวคือ $(d,e,f)=(0,0,0)$

$\{\overline{u}+\overline{v},\overline{u}+\overline{w},\overline{v}+\overline{w}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\{\overline{u}+\overline{v},\overline{u}+\overline{w},\overline{v}+\overline{w}\}$ จะเป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ V

3.2 กำหนดให้ $P_n(x)$ คือพหุนามดีกรีไม่เกิน n และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง
ให้ $W = \{p \in P_2(x) \mid p(1) = 0\}$ จงแสดงว่า $Dim(W) = 2$ (2.5 คะแนน)

แนวตอบ

ให้ $f(x) = u_1 + u_2x + u_3x^2$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน 2 ใดๆ

พิจารณา $f(1) = u_1 + u_2 + u_3 = 0$ หรือ $u_1 = -u_2 - u_3$

จะได้ว่า $f(x) \in W$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = -u_2 - u_3 + u_2x + u_3x^2$

ก็ต่อเมื่อ $f(x) = u_2(x-1) + u_3(x^2-1)$

(1) พิจารณาผลรวมเชิงเส้น $f(x) = u_2(x-1) + u_3(x^2-1)$

สมาชิก ใดๆ ใน W สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $x-1$ และ x^2-1

ดังนั้น $W = span\{x-1, x^2-1\}$

(2) พิจารณา $0 = u_2(x-1) + u_3(x^2-1) = (-u_2 - u_3) + u_2x + u_3x^2$ ก็ต่อเมื่อ $u_2 = u_3 = 0$

ดังนั้น $\{x-1, x^2-1\}$ อิสระเชิงเส้น

จาก (1) และ (2) จะได้ $\{x-1, x^2-1\}$ คือฐานหลัก (basis) ของ W

ดังนั้น $Dim(W) = 2$

หมายเหตุ

อาจเลือกสมาชิกใน W ตัวอื่นแตกต่างจากนี้

เลือกอย่างไรก็ได้ เลือกมาแล้วจะต้องแสดงสมบัติ 2 ข้อ

4. Row Space, Column Space, and Null space

4.1. กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิจารณาสมาชิกนำ

ถ้าใช้การดำเนินการตามแถว (Row Operations) โดยไม่ใช้การสลับแถว เพื่อหาฐานหลักของปริภูมิแบบต่างๆ จงตอบคำถามต่อไปนี้ **(เติมเฉพาะคำตอบ ที่ว่างสามารถทดได้)** (2 คะแนน)

(1.) ฐานหลัก (basis) ของ column space ของ A คือ

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}$$

(2.) ฐานหลัก (basis) ของ row space ของ A คือ (ให้ตอบในรูปเวกเตอร์แถวของ A)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

4.2. กำหนด B เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ขนาด 5×7 และ $rank(B) = 5$

เมื่อ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_7 \end{bmatrix}^T$ เป็นเมทริกซ์ตัวแปร

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_5 \end{bmatrix}^T$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ (1.5 คะแนน)

(1.) พิจารณาผลสรุปต่อไปนี้ ข้อใดบ้างสรุปได้ถูกต้อง

(a) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องมีคำตอบเดียว

(b) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องมีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

(c) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ต้องไม่มีคำตอบ

(d) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะมีคำตอบเดียว

(e) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะมีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

(f) ระบบสมการ $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ อาจจะไม่มีคำตอบ

ข้อที่สรุปได้ถูกต้องคือ

b

(2.) มิติ (dimension) ของ column space ของ B = 5

(3.) $nullity(B)$ = 2

4.3. จงตรวจสอบว่า $\mathbf{b}$ อยู่ใน column space ของ C หรือไม่ เมื่อกำหนด (1.5 คะแนน)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

แนวตอบ ให้ $\overline{c}_1, \overline{c}_2$ เป็น column vectors ของ C

สมมติ $\mathbf{b} \in \mathrm{col}(C)$ แสดงว่าจะต้องมี $x, y \in \mathbb{R}$ ทำให้ $x\overline{c}_1 + y\overline{c}_2 = \mathbf{b}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ระบบสมการมีคำตอบ นั่นคือ $\mathbf{b}$ อยู่ใน column space ของ C

5. การแปลงเชิงเส้น

5.1. กำหนดการแปลงเชิงเส้น

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ แทนการสะท้อนกับเส้นตรง $y = -x$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ แทนการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 90° รอบจุดกำเนิด ตามด้วยการสะท้อนกับเส้นตรง $y = x$

$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T_3(x, y) = (-x + y, x + 2y)$

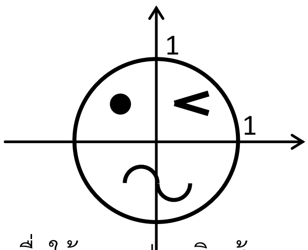
จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T_1, T_2 และ T_3 (3 คะแนน)

(เติมเฉพาะคำตอบ ที่ว่างสามารถทดได้)

แนวตอบ

$\left[T_1\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[T_2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[T_3\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

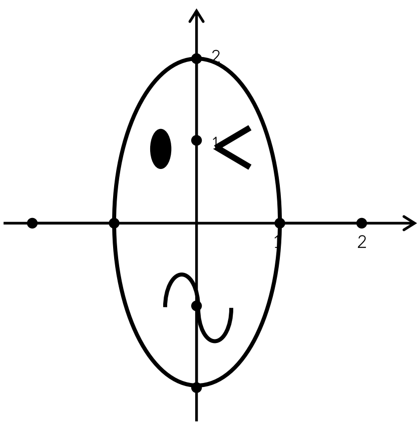
5.2. กำหนด $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ และกำหนดภาพ

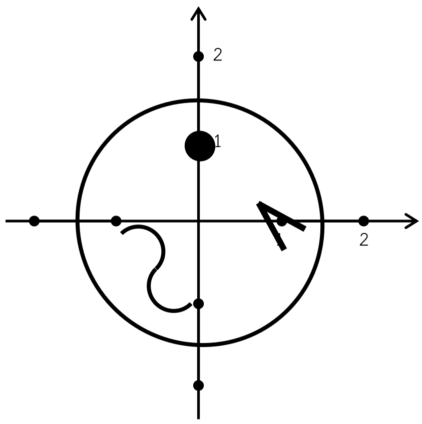


จงวาดภาพที่เกิดขึ้นเมื่อใช้การแปลงเชิงเส้น $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ บนภาพที่กำหนดให้ (2 คะแนน)

(1.) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(2.) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

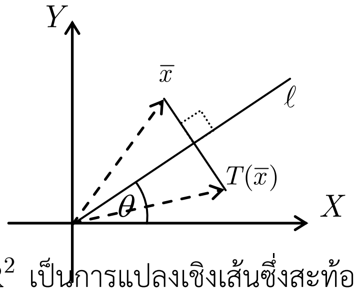




หมุนตามเข็ม 45° ตามด้วยขยาย $\sqrt{2}$

หรือขยาย $\sqrt{2}$ ตามด้วยหมุนตามเข็ม 45°

6. กำหนดให้ ℓ เป็นเส้นตรงในระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด และทำมุม θ กับแกน X โดยที่ $0 \le \theta < \pi$ ดังรูป

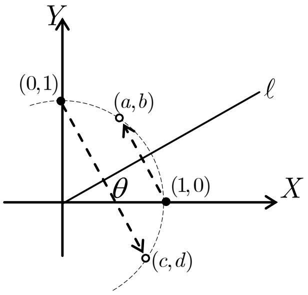


ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งสะท้อนเวกเตอร์กับเส้นตรง ℓ

6.1 จงแสดงว่าเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลง T คือ $[T] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ (3 คะแนน)

แนวตอบ

ให้ $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $T(1,0) = (a,b)$ และ $T(0,1) = (c,d)$



เมื่อ θ เป็นมุมที่ ℓ ทำกับแกน X โดยที่ $0 \le \theta < \pi$

พิจารณา (a,b) และ (c,d) เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

จะได้ $(a,b) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$

และ $(c,d) = (\cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta), -\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$

จะได้

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

แนวตอบ

$\det[T] = -\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = -1 \ne 0$

ดังนั้น T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง

จาก $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นซึ่งสะท้อนเวกเตอร์ผ่านเส้นตรง ℓ

ตัวผกผันจะต้องเป็นการสะท้อนกลับกับเส้นตรงเดิม (ไม่จำเป็นต้องคำนวณ)

$$[T^{-1}] = [T] = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$