เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 3

นิยามเบื้องต้น

ปริภูมิเวกเตอร์

กำหนดให้ $V \neq \varnothing$ และ F เป็นฟิลด์

กำหนดการดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การดำเนินการบน V เรียกว่า**การบวก**เป็นการนำเวกเตอร์ใน V มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การดำเนินการบน V และ F เรียกว่า**การคูณด้วยสเกลาร์** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V และสเกลาร์ใน F มาคูณกัน

จะเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บน F ก็ต่อเมื่อการดำเนินการทั้งสองสอดคล้องกับสัจพจน์ 10 ข้อต่อไปนี้

1. $\overline{u} + \overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v} \in V$
2. $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$ สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v} \in V$
3. $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$ สำหรับทุก $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$
4. มี $\overline{0}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\overline{0} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$ สำหรับทุก $\overline{u} \in V$
5. สำหรับแต่ละ $\overline{u}$ ใน V จะมี $-\overline{u}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\overline{u} + (-\overline{u}) = (-\overline{u}) + \overline{u} = \overline{0}$
6. $k\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $k \in F, \overline{u} \in V$
7. $k(\overline{u} + \overline{v}) = k\overline{u} + k\overline{v}$
8. $(k + m)\overline{u} = k\overline{u} + m\overline{u}$
9. $(km)\overline{u} = k(m\overline{u}) = m(k\overline{u})$
10. $1\overline{u} = \overline{u}$

1. กำหนดให้ $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ และ $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ถ้า T_1 เป็นการแปลงแบบการหมุนด้วยมุมขนาด 45° ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $T_2(1,0) = (-2,5)$ และ $T_2(0,1) = (-1,3)$ จงหา

1.1 เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_1 และ T_2 (1 คะแนน)

เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_1 คือ $\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_2 คือ $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

1.2 จงแสดงว่า $T_1 \circ T_2$ เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (2 คะแนน)

จาก $T_1 \circ T_2 = [T_1][T_2]$

จะได้ $T_1 \circ T_2 = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

พิจารณา $\det([T_1][T_2]) = (1)(-1) = -1 \neq 0$

ดังนั้น $T_1 \circ T_2$ เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง

1.3 จงหา $(T_1 \circ T_2)^{-1}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2 คะแนน)

จาก $[T_1 \circ T_2]^{-1} = ([T_1][T_2])^{-1} = [T_2]^{-1}[T_1]^{-1}$

จะได้ $[T_2]^{-1}[T_1]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(T_1 \circ T_2)^{-1}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ หรือ $(0,4)$

2. กำหนดให้ $V=\mathbb{R}^2$ และถ้า $(a,b),(c,d)\in V, k$ เป็นสเกลาร์ใดๆ จะนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(a,b)+(c,d)=(a+c-1,b+d-1)$ และ $k(a,b)=(a,kb)$

2.1 จงแสดงว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวมีเอกลักษณ์การบวก (1.5 คะแนน)

แนวตอบ

เลือก $(1,1)\in V$

มี $(1,1)\in V$ ทำให้ $(a,b)+(1,1)=(a+1-1,b+1-1)=(a,b)$

ดังนั้น $(1,1)$ เป็นเอกลักษณ์การบวก

2.2 ถ้า $\bar{u}=(a,b)\in V$ จงหาตัวผกผันการบวกของ $\bar{u}$ (1.5 คะแนน)

แนวตอบ

เลือก $-\bar{u}=(2-a,2-b)\in V$

สำหรับ $\bar{u}=(a,b)\in V$ จะมี $-\bar{u}=(2-a,2-b)\in\mathbb{R}^2$ ทำให้ $\bar{u}+(-\bar{u})=(1,1)$

ดังนั้น $-\bar{u}=(2-a,2-b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $\bar{u}=(a,b)$

2.3 จงตรวจสอบว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็น จงบอกเหตุผล (2 คะแนน)

แนวตอบ V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าว**ไม่เป็น**ปริภูมิเวกเตอร์ เนื่องจากมีสมบัติไม่ครบตามสัจพจน์ทั้ง 10 ข้อ สัจพจน์ข้อที่ไม่สอดคล้องได้แก่สัจพจน์ข้อที่ 7 และ 8

3. จงตรวจสอบว่าเซต S ที่กำหนดให้เป็นปริภูมิย่อยหรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน

3.1 $S = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a-d = b-c\}$ (2.5 คะแนน)

แนวตอบ S ปริภูมิย่อยของ M_{22}

เห็นไดชัดว่า $S \neq \varnothing$ ดังนั้นจะแสดงสมบัติสองข้อ

(1). สมบัติปิดการบวก

สมมุติ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in S$

จะได้ $a_1 - d_1 = b_1 - c_1$ และ $a_2 - d_2 = b_2 - c_2$

พิจารณา $(a_1 + a_2) - (d_1 + d_2) = (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2)$

ดั้งนั้น $\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$

(2). สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์

สมมุติ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in S, k \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1 - d_1 = b_1 - c_1$

พิจารณา $ka - kd_1 = kb_1 - kc_1$

ดั้งนั้น $k\bar{u} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \in S$

ดั้งนั้น S ปริภูมิย่อยของ M_{22}

3.2 $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$ (2.5 คะแนน)

แนวตอบ S ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

พิจารณา $(1,-1) + (-1,1) = (0,0) \notin S$

นั่นคือ S ไม่มีสมบัติปิดการบวก

4. กำหนด $\overline{v}_1 = (1,0,-2,5), \overline{v}_2 = (0,1,1,1), \overline{v}_3 = (0,-1,1,-1), \overline{v}_4 = (1,1,-2,6)$

4.1 จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ อยู่ใน $span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ (3คะแนน)

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ถ้าระบบสมการมีคำตอบ (a,b,c,d) แสดงว่า $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ อยู่ใน $span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$

พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากมีคำตอบ $(a,b,c,d) = (-t-1, -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, t)$ เมื่อ t เป็นสเกลาร์

แสดงว่า $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ อยู่ใน $span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$

4.2 จงเขียนเวกเตอร์ $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ (1คะแนน)

แนวตอบ จาก 4.1 เลือก $t = 0$ จะได้ $(a,b,c,d) = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

ดังนั้น $\overline{u} = -\overline{v}_1 - \dfrac{1}{2}\overline{v}_2 - \dfrac{1}{2}\overline{v}_3 + 0\overline{v}_4$

4.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 & \overline{v}_4 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $rank(A)$ (1 คะแนน)

แนวตอบ จาก 4.1 จะเห็นชัดว่า $rank(A) = 3$

5. กำหนดระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ดังนี้

$$\begin{cases} 3w \qquad -3y + 9z = 0 \\ -w + x - y + 2z = 0 \\ \qquad x - 2y + z = 0 \\ 4w + x - 6y + 13z = 0 \end{cases}$$

จงหาฐานหลัก (Basis) และมิติ (Dimension) ของปริภูมิคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่กำหนดให้ (5 คะแนน)

แนวตอบ พิจารณาเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นสเกลาร์

ให้ $S = \{\overline{v}_1 = (1,2,1,0)\}$

ปริภูมิคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์คือ $W = span(S)$

ดั้งนั้นฐานหลักของ W คือ S และมิติ $Dim(W) = 1$

6. จงแสดงว่า $S=\{1+2x-x^2, 2-x+2x^2, -1+8x-3x^2\}$ เป็นฐานหลัก (Basis) ของปริภูมิ P_2 (5 คะแนน)

แนวตอบจะต้องแสดง1. $span(S)=P_2$

2. S เป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ $\overline{v}_1=1+2x-x^2, \overline{v}_2=2-x+2x^2, \overline{v}_3-1+8x-3x^2$

(1) จะแสดง $span(S)=P_2$

ให้ $\overline{v}_1=1+2x-x^2, \overline{v}_2=2-x+2x^2, \overline{v}_3=-1+8x-3x^2, \overline{u}=u_1+u_2x+u_3x^2$

พิจารณาผลรวมเชิงเส้น $a\overline{v}_1+b\overline{v}_2+c\overline{v}_3=\overline{u}$ เมื่อ $a,b,c\in R$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}=-20\neq 0$

ทำให้ระบบสมการมีคำตอบชุดเดียวสำหรับแต่ละ $\overline{u}$

ดังนั้น $span(S)=P_2$

(2) จะแสดง S อิสระเชิงเส้น

พิจารณา $d\overline{v}_1+e\overline{v}_2+f\overline{v}_3=\overline{0}$ เมื่อ $d,e,f\in R$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}=-20\neq 0$

ทำให้ระบบสมการมีคำตอบชุดเดียวคือ $(d,e,f)=(0,0,0)$

ดังนั้น S อิสระเชิงเส้น

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า S เป็นฐานหลักของปริภูมิ P_2

7. ร้านสุกี้แห่งหนึ่งมีสูตรผสมน้ำจิ้ม 3 สูตรคือ สูตรธรรมดา สูตรโบราณ สูตรโมเดิร์น โดยแต่ละสูตรจะใช้ส่วนผสมหลัก 4 ชนิด ได้แก่เกลือ กระเทียม พริกและน้ำตาล ในการทำน้ำจิ้มจะใช้ส่วนผสมแต่ละอย่างดังตาราง (หน่วยเป็นกิโลกรัมต่อน้ำจิ้มหนึ่งหน่วย)

ส่วนผสม	**สูตรธรรมดา**	**สูตรโบราณ**	**สูตรโมเดิร์น**
เกลือ	1	2	1
กระเทียม	2	5	5
พริก	2	5	6
น้ำตาล	3	7	7

ถ้ามีส่วนผสมแต่ละชนิดจำกัด คือมีเกลือ 16 กิโลกรัม กระเทียม 45 กิโลกรัม พริก 48 กิโลกรัมและน้ำตาล 64 กิโลกรัมจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้ส่วนผสมหมดทุกชนิดพอดีในการทำน้ำจิ้มทั้ง 3 สูตร ถ้าเป็นไปได้จะได้น้ำจิ้ม ชนิดละกี่หน่วย (5 คะแนน)

แนวคิด ให้ $\bar{v}_1 = (1,2,2,3), \bar{v}_2 = (2,5,5,7), \bar{v}_3 = (1,5,6,7), \bar{u} = (16,45,48,64)$

จะใช้ส่วนผสมหมดทุกชนิดพอดีเมื่อ $\bar{u} \in span\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$

พิจารณาสมการ $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 + c\bar{v}_3 = \bar{u}$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 45 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix}$$

พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 5 & 5 & 45 \\ 2 & 5 & 6 & 48 \\ 3 & 7 & 7 & 64 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ระบบสมการมีคำตอบชุดเดียวคือ $(a,b,c) = (5,4,3)$

ดังนั้น เป็นไปได้ที่จะใช้ส่วนผสมหมดทุกชนิดพอดีในการทำน้ำจิ้มทั้ง 3 สูตร

โดยที่จะได้น้ำจิ้มสูตรธรรมดา 5 หน่วย สูตรโบราณ 4 หน่วย และสูตรโมเดิร์น 3 หน่วย