## กำหนดนิยามเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

**นิยาม 1 เมทริกซ์มูลฐาน**

เมทริกซ์ $E$ ที่มีขนาด $n \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ $E$ เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I_n$

**นิยาม 2 เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)**

เมทริกซ์จัตุรัส $A$ จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร** เมื่อ $A^T = A$

**นิยาม 3 ดีเทอร์มินันต์**

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det$ นิยามว่า

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$$

เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1, 2, \ldots, n\}$ และมีวิธีการเลือกเครื่องหมาย $\pm$ ดังนี้

เลือก $+$ เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่

เลือก $-$ เมื่อ $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่

เรียก $\det(A)$ ว่าดีเทอร์มินันต์ของ $A$

1.1 จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ของ $a,b$ และ $c$ ที่ทำให้ระบบสมการ

$$x+2y-3z=a$$
$$2x+3y+3z=b$$
$$5x+9y-6z=c$$

มีคำตอบ สำหรับทุกจำนวนจริง $a,b$ และ $c$ (2 คะแนน)

**วิธีทำ** จากระบบสมการได้ Augmented matrix คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 5 & 9 & -6 & c \end{bmatrix} \qquad (0.5 \text{ คะแนน})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 5 & 9 & -6 & c \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 9 & b-2a \\ 5 & 9 & -6 & c \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_3-5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -1 & 9 & b-2a \\ 0 & -1 & 9 & c-5a \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(-1)R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -9 & 2a-b \\ 0 & -1 & 9 & c-5a \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -9 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-b-3a \end{bmatrix} \qquad (1 \text{ คะแนน})$$

<u>หมายเหตุ</u> ดำเนินการตามแถวจนสรุปคำตอบได้จะได้ 1 คะแนน

ดำเนินการตามแถวผิดบ้างแต่ถูกต้อง 50% ขึ้นไปได้ 0.5 คะแนน

ดำเนินการตามแถวผิดบ้างแต่ถูกต้องน้อยกว่า 50% ได้ 0 คะแนน

ระบบสมการนี้มีคำตอบเมื่อ c – b - 3a = 0 (0.5 คะแนน)

1.2 จงแสดงวิธีหาคำตอบของระบบสมการ ( 3 คะแนน)

$$\begin{aligned} x+y-z+w &= 1 \\ 2x+y+z+w &= 2 \\ 3x+2y\quad+2w &= 3 \end{aligned}$$

**วิธีทำ** จากระบบสมการได้ Augmented matrix คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(0.5 คะแนน)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_3-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{(-1)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(1 คะแนน)}$$

<u>หมายเหตุ</u> ดำเนินการตามแถวจนสรุปคำตอบได้จะได้ 1 คะแนน

ดำเนินการตามแถวผิดบ้างแต่ถูกต้อง 50% ขึ้นไปได้ 0.5 คะแนน

ดำเนินการตามแถวผิดบ้างแต่ถูกต้องน้อยกว่า 50% ได้ 0 คะแนน

จะได้ $\left.\begin{aligned} x+2z &= 1 \\ y-3z+w &= 0 \end{aligned}\right\}$ (0.5 คะแนน)

นั่นคือ $x = 1-2z$

$y = 3z-w$

ให้ z, w เป็นค่าคงที่ใดๆ ( 0.5 คะแนน)

<u>หมายเหตุ</u> คำตอบมีได้อีก 3 คำตอบที่สมมูลกันคือ

1. ให้ x, y เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ $z = \frac{1-x}{2}, w = 3\left(\frac{1-x}{2}\right) - y$
2. ให้ x, w เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ $z = \frac{1-x}{2}, y = 3\left(\frac{1-x}{2}\right) - w$
3. ให้ z, y เป็นค่าคงที่ใดๆ จะได้ $x = 1-2z, w = 3z-y$

คำตอบนอกเหนือจากที่กล่าวมาได้ 0 คะแนน

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้คือ $(1-2a, 3a-b, a, b)$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ (0.5 คะแนน)

<u>หมายเหตุ</u> คำตอบมีได้อีก 3 คำตอบที่สมมูลกันคือ

1. $(a, b, \frac{1-a}{2}, 3(\frac{1-a}{2}) - b)$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ
2. $(a, 3(\frac{1-a}{2}) - b, \frac{1-a}{2}, b)$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ
3. $(1-2b, a, b, 3b-a)$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

2. ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่ง $A^2 = A$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้อย่างละเอียด

2.1 ถ้า $B$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่หาตัวผกผันได้แล้ว $(B^{-1}AB)^2 = B^{-1}AB$ (1 คะแนน)

**พิสูจน์** ให้ $B$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่หาตัวผกผันได้

จะได้ $(B^{-1}AB)^2 = (B^{-1}AB)(B^{-1}AB)$ (นิยามการยกกำลังของเมทริกซ์)

$= (B^{-1}A)(BB^{-1})(AB)$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ)

$= (B^{-1}A)(I)(AB)$ (สมบัติของอินเวอร์สภายใต้การคูณ)

$= (B^{-1}A)(AB)$ (สมบัติของเอกลักษณ์การคูณ)

$= B^{-1}(AA)B$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการคูณ)

$= B^{-1}A^2B$ (นิยามการยกกำลังของเมทริกซ์)

$= B^{-1}AB$ ( $A^2 = A$ )

<u>หมายเหตุ</u> การให้คะแนนขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของผู้ตรวจ

2.2 ทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2,\ A^k = A$ (ให้ใช้การพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์) ( 3 คะแนน)

**พิสูจน์** ให้ P(n) แทนข้อความ $A^k = A$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ ( 0.5 คะแนน)

<u>ขั้นฐาน</u> พิจารณา $k = 2$, จาก $A^2 = A$

ดังนั้น P(2) เป็นจริง (0.5 คะแนน)

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2

สมมติ P(k) เป็นจริง นั่นคือ $A^k = A$ (0.5 คะแนน)

พิจารณา P(k+1), $A^{k+1} = A^kA$ (นิยามการยกกำลัง)

$= AA$ (P(k) เป็นจริง)

$= A^2$ (นิยามการยกกำลัง)

$= A$ ( $A^2 = A$ )

(1 คะแนน)

โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์, $A^k = A$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ (0.5 คะแนน)

2.3

ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว $(I-2A)^T(I-2A)=I$ (1 คะแนน)

**พิสูจน์** ให้ $A$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะได้ $A^T=A$

ดังนั้น $(I-2A)^T(I-2A)=(I^T-(2A)^T)(I-2A)$ (สมบัติของทรานสโพส)

$=(I-2A^T)(I-2A)$ (สมบัติของทรานสโพส)

$=(I-2A)(I-2A)$ ( $A^T=A$)

$=(I^2-2A-2A+4A^2)$ (สมบัติการแจกแจง)

$=(I-4A+4A)=I$ ($A^2=A$)

<u>หมายเหตุ</u> การให้คะแนนขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของผู้ตรวจ

3. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

3.1 ถ้า $E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ และ $E_5=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

จงหาเมทริกซ์มูลฐาน $E_2,E_3,E_4$ และ $E_6$ ที่ทำให้ $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=I$ ( 3 คะแนน)

**วิธีทำ**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\2&0&1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{(-1)R_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{R_1-R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(1.8 คะแนน) ดำเนินการตามแถวถูกต้องได้ขั้นตอนละ 0.3 คะแนน

ดำเนินการตามแถว 6 ครั้งจะได้ $E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, E_6=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(1.2 คะแนน) หา $E_2,E_3,E_4,E_6$ ถูกต้องได้เมทริกซ์ละ 0.3 คะแนน

3.2 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $A^{-1}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของเมทริกซ์มูลฐาน (1 คะแนน)

**วิธีทำ** จาก $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$

จะได้ $E_6E_5E_4E_3E_2E_1AA^{-1} = IA^{-1}$ (0.5 คะแนน)

นั่นคือ

$$A^{-1} = E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(0.5 คะแนน)

3.3 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $A$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการคูณของเมทริกซ์มูลฐาน (1 คะแนน)

**วิธีทำ** จาก $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$

จะได้ $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}$ (0.4 คะแนน)

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$ (0.6 คะแนน)

หา $E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1}, E_4^{-1}, E_5^{-1}, E_6^{-1}$ ถูกต้องได้เมทริกซ์ละ 0.1 คะแนน

4. จงเติมเฉพาะคำตอบที่ถูกต้องลงในช่อง $\boxed{\phantom{0}}$

4.1 จงหาจำนวนการผกผัน (inversion) ของการเรียงสับเปลี่ยนต่อไปนี้ (2 คะแนน)

ก) (1, 2, 3, 4, 5) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{0}$ ง) (3, 5, 1, 2, 4) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{5}$

ข) (3, 2, 4, 1, 5) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{4}$ จ) (2, 1, 5, 3, 4) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{3}$

ค) (2, 4, 3, 1, 5) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{4}$ ฉ) (4, 3, 1, 5, 2) มีจำนวนการผกผันเท่ากับ $\boxed{6}$

| | |
|---|---|
| ตอบถูกต้อง 6 ข้อได้ | 2 คะแนน |
| ตอบถูกต้อง 5 ข้อได้ | 1.5 คะแนน |
| ตอบถูกต้อง 4 ข้อได้ | 1 คะแนน |
| ตอบถูกต้อง 3 ข้อได้ | 0.5 คะแนน |
| ตอบถูกต้องน้อยกว่า 3 ข้อได้ | 0 คะแนน |

4.2 ให้ $A=[a_{ij}]_{5\times 5}$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}\ \boxed{-}\ a_{31}a_{42}a_{13}a_{54}a_{25}\ \boxed{-}\ a_{43}a_{12}a_{54}a_{21}a_{35}\ \boxed{+}$$

$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{55}\pm\ldots$ (1 คะแนน)

จาก ง) (3, 5, 1, 2, 4) เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่ เครื่องหมาย -

จาก จ) (2, 1, 5, 3, 4) เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่ เครื่องหมาย -

จาก ค) (2, 4, 3, 1, 5) เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่ เครื่องหมาย +

<u>หมายเหตุ</u> ต้องตอบถูกหมดถึงจะได้ 1 คะแนน

4.3 กำหนด $A=\begin{bmatrix}0&4&0&5\\1&0&-1&2\\0&3&0&-2\\0&0&-6&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&-1&2&7&11\\-3&4&8&-6&1\\8&-2&3&-1&5\\10&9&-7&4&-3\\1&2&-5&1&8\end{bmatrix}$

$\det(2A+2I)=\boxed{1440}$ (1 คะแนน)

$6C_{11}(B)-8C_{12}(B)-16C_{13}(B)+12C_{14}(B)-2C_{15}(B)=\boxed{0}$ ( 1 คะแนน)

$$\det(2A+2I)=\det(2(A+I))=2^4\det(A+I)=16\begin{vmatrix}1&4&0&5\\1&1&-1&2\\0&3&1&-2\\0&0&-6&1\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}1&4&0&5\\0&-3&-1&-3\\0&3&1&-2\\0&0&-6&1\end{vmatrix}=16\begin{vmatrix}-3&-1&-3\\3&1&-2\\0&-6&1\end{vmatrix}=1440$$

$6C_{11}(B)-8C_{12}(B)-16C_{13}(B)+12C_{14}(B)-2C_{15}(B)=(-2)[-3C_{11}(B)+4C_{12}(B)+8C_{13}(B)-6C_{14}(B)+C_{15}(B)]$

พิจารณาแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ B $b_{21}C_{11}(B)+b_{22}C_{12}(B)+b_{23}C_{13}(B)+b_{24}C_{14}(B)+b_{25}C_{15}(B)=0$

ดังนั้น $-3C_{11}(B)+4C_{12}(B)+8C_{13}(B)-6C_{14}(B)+C_{15}(B)=0$

นั่นคือ $6C_{11}(B)-8C_{12}(B)-16C_{13}(B)+12C_{14}(B)-2C_{15}(B)=0$

5. กำหนดให้ $\lambda, a \in R$ และ $A, B$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a+\lambda & a & \cdots & a \\ a & a+\lambda & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+\lambda \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} na+\lambda & na+\lambda & \cdots & na+\lambda \\ a & a+\lambda & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+\lambda \end{bmatrix}$$

5.1 จงแสดงว่า $A$ สมมูลตามแถวกับ $B$ ( 2 คะแนน)

**พิสูจน์** ใช้การดำเนินการตามแถว $R_1 + R_j$ สำหรับทุก $j = 2, 3, ..., n$

5.2 จงแสดงว่า $\det(A) = \lambda^{n-1}(na+\lambda)$ ( 3 คะแนน)

**พิสูจน์** $\det(A) = \det(B)$ (0.5 คะแนน)

$= \det(B^T)$ (0.5 คะแนน)

$$= \begin{vmatrix} na+\lambda & a & \cdots & a \\ na+\lambda & a+\lambda & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na+\lambda & a & \cdots & a+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} na+\lambda & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$ (1 คะแนน)

$= \lambda^{n-1}(na+\lambda)$ (1 คะแนน)

<u>หมายเหตุ</u> วิธีการอื่นขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของผู้ตรวจ

6.

6.1 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(2,1,1)$ , $Q(0,2,3)$ และ $R(1,0,-1)$ ( 3 คะแนน)

**วิธีทำ** เนื่องจาก $P,Q,R$ เป็นจุดบนระนาบดังนั้น $\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 1,\ 2)$ และ $\overrightarrow{PR}=(-1,\ \text{-}1,\ \text{-}2)$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ

(1 คะแนน)

เวกเตอร์แนวฉากคือ $\bar{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$

$$=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-6\bar{j}+3\bar{k}=(0,-6,3)$$ ( 1 คะแนน)

ดังนั้นสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P$ และมี $\bar{n}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากคือ

$$(0)(x+2)+(-6)(y-1)+(3)(z-1)=0$$

$$-6y+3z+3=0$$

$$2y-z-1=0$$ ( 1 คะแนน)

6.2 กำหนดให้ $\bar{u}=-\overline{e_1}+\overline{e_3}+2\overline{e_4}$ และ $\bar{v}=3\overline{e_2}-5\overline{e_3}$

จงหา $d(\bar{u},\bar{v})$ และ $(2\bar{u}+\bar{v})\cdot(-3\bar{u}+2\bar{v})$ ( 2 คะแนน)

**วิธีทำ** $\bar{u}=(-1,0,1,2)$ จะได้ $\|\bar{u}\|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

$\bar{v}=(0,3,-5,0)$ จะได้ $\|\bar{v}\|=\sqrt{0+9+25+0}=\sqrt{34}$

จะได้ $d(\bar{u},\bar{v})=\|\bar{u}-\bar{v}\|=\sqrt{1+9+36+4}=\sqrt{50}$ (1 คะแนน)

$$(2\bar{u}+\bar{v})\cdot(-3\bar{u}+2\bar{v})=-6\|\bar{u}\|^2+\bar{u}\cdot\bar{v}+2\|\bar{v}\|^2$$

$$=-6(6)+(-5)+2(34)=27$$ ( 1 คะแนน)