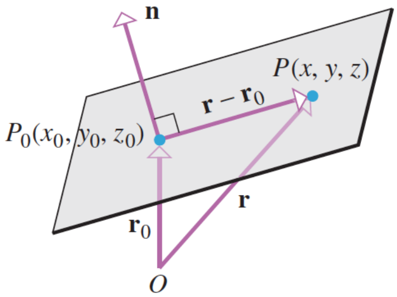
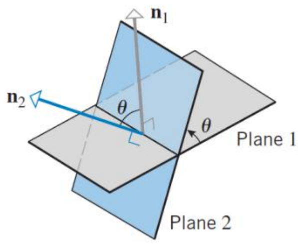
Three

ปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด

Euclidean Vector Spaces

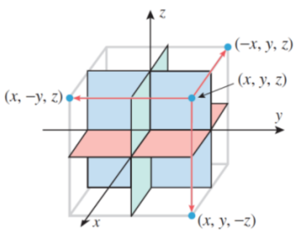




เราคุ้นเคยกับปริภูมิสองมิติ และปริภู มิสามมิติ และสมบัติของการดำเนินการ บนเวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติและปริภูมิสามมิติ ในบทนี้เราจะขยายความรู้ไปสู่ปริภูมิ n มิติ เป้าหมายสำคัญคือการขยายความรู้และศึกษาสมบัติของการดำเนินการบนเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

3.1 ระบบพิกัดฉากและเวกเตอร์

ปริภูมิ (space) คือส่วนที่ไร้ขอบเขต เป็นปริมาณที่มีมิติในวัตถุและเหตุการณ์ และมีตำแหน่งสัมพัทธ์และทิศทาง สำหรับนักคณิตศาสตร์หมายถึงโลกส่วนตัวที่สร้างขึ้น โดยสมาชิกที่อาศัยอยู่ในโลกนี้จะต้องมีคุณสมบัติตามกฎที่นักคณิตศาสตร์กำหนดขึ้นอย่างเคร่งครัด ในบทนี้เราจะศึกษาปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ



จุดต่างๆ ในสามมิติ

เราใช้คู่อันดับ (x, y) แทนจุดในสองมิติ สำหรับจุดในสามมิติเราจะแทนด้วยสามสิ่งอันดับ (x, y, z) และเซตของสามสิ่งอันดับทั้งหมด เรียกว่า ปริภูมิ 3 มิติ (3-space) และเขียนแทนด้วยสัญญาลักษณ์ $\mathbb{R}^3$

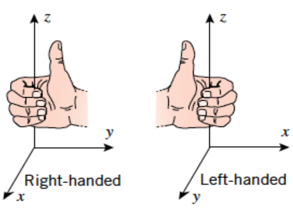
ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ ประกอบด้วยระนาบ 3 ระนาบ เรียกว่า**ระนาบอ้างอิง** ตั้งฉากกัน ระนาบทั้งสามจะตัดกันได้รอยตัดเป็นเส้นตรงสามเส้นเรียกว่าแกนพิกัด (Coordinate axes) ดังนี้

แกน X เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ XY และระนาบ XZ

แกน Y เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ XY และระนาบ YZ

แกน Z เกิดจากการตัดกันระหว่างระนาบ YZ และระนาบ XZ

เรียกจุดตัดของแกนทั้งสามว่า **จุดกำเนิด** (Origin) แทนด้วย O



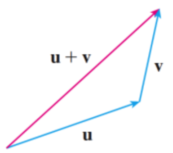
ระบบมือขวาและระบบมือซ้าย

การกำหนดพิกัดของจุด เราจะเริ่มกำหนดทิศทางบวกทั้งสามแกน จะวัดจากจุดกำเนิดไปตามแต่ละแกนในทิศใดทิศหนึ่งในระบบมือขวาหรือระบบมือซ้าย โดยปกติจะกำหนดแกนโดยใช้ระบบมือขวา

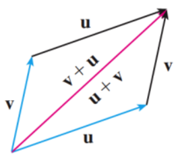
ทฤษฎีบท 3.1.1
ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ คือ

$$\left|PQ\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

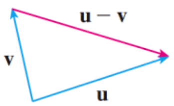
พีชคณิตเชิงเส้นมักจะเริ่มจากการศึกษาเวกเตอร์ในระบบพิกัด มุมฉาก 2 และ 3 มิติ ซึ่งเวกเตอร์ในที่นี้ คือส่วนของเส้นที่มีทิศทางกำกับ โดยปกติแล้วจะถูกเขียนในรูปแบบของขนาด และทิศทาง เวกเตอร์เหล่านี้สามารถบวกเข้าด้วยกันได้ และสามารถคูณด้วยสเกลาร์ได้



การบวกเวกเตอร์โดยกฎสามเหลี่ยม



การบวกเวกเตอร์โดยกฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน



การลบเวกเตอร์

นิยาม 3.1.2
กำหนดให้ x, y, z เป็นสเกลาร์ เรียก (x, y, z) ว่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ หรือเรียกสั้นๆ ว่า**เวกเตอร์** ในทางเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ (x, y, z) ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทาง ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุด O และมีจุดปลายที่จุด (x, y, z)

นิยาม 3.1.3
ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางมีจุดตั้งต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดปลายที่ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ แทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึงเวกเตอร์ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

นิยาม 3.1.4 การดำเนินการมาตรฐานบนเวกเตอร์ 3 มิติ
กำหนด $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เราจะนิยามการดำเนินการบนเวกเตอร์ดังนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์

$\bar{u} = \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$

การบวกเวกเตอร์

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า k เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $k\bar{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$

การดำเนินการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เราเรียกว่า **การดำเนินการมาตรฐาน (Standard operations)** บน $\mathbb{R}^3$

เวกเตอร์ศูนย์บน $\mathbb{R}^3$ แทนด้วย $\bar{0}$ หมายถึงเวกเตอร์ $(0, 0, 0)$

นิเสธของเวกเตอร์ $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$ โดยที่ $-\bar{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$

สมบัติของการดำเนินการสำหรับเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

ทฤษฎีบท 3.1.5
ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ k, m เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
4. มี $\bar{0}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งทำให้ $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$
5. สำหรับ $\bar{u}$ จะมี $-\bar{u}$ ใน $\mathbb{R}^3$ ทำให้ $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
6. $k\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$
7. $(km)\bar{u} = k(m\bar{u}) = m(k\bar{u})$
8. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
9. $(k + m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

เวกเตอร์ใน n มิติ (Vectors in *n*-Space)

แนวคิดเกี่ยวกับขนาดของเส้น ความยาว มุม สามารถเข้าใจได้ง่ายในกรณีที่เป็นมิติเดียว หรือ 2-3 มิติ ถ้ามิติมากกว่า 3 มิติเป็นการยากที่จะวาดให้เห็นได้ ในกรณีของเวกเตอร์สถานะที่มีส่วนประกอบของแรงดัน อุณหภูมิ และระยะขจัด เป็นการยากที่จะกล่าวถึงคุณลักษณะของเวกเตอร์แทนสถานะดังกล่าว ดังนั้นจึงต้องหาคำจำกัดความและคุณสมบัติของเวกเตอร์และเวกเตอร์สเปส (หรือปริภูมิเวกเตอร์) ก่อนอื่นเราขอนิยามเวกเตอร์ในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ดังนี้

พีชคณิตสมัยใหม่ ได้รับการขยายแนวความคิดเพื่อพิจารณาระบบปริภูมิใดๆ หรือ infinite dimension ปริภูมิเวกเตอร์ของปริภูมิขนาด n ถูกเรียกว่า n -space ซึ่งคุณสมบัติโดยส่วนใหญ่ของ 2 หรือ 3-space สามารถขยายไปสู่มิติที่สูงขึ้นได้

นิยาม 3.1.6
กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก คำว่า n สิ่งอันดับ (ordered *n*-tuple) หมายถึงลำดับของจำนวนจริง n จำนวน ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เซตของ n สิ่งอันดับทั้งหมด เรียกว่า ปริภูมิ n มิติ (*n*-space) และเขียนแทนด้วยสัญญาลักษณ์ $\mathbb{R}^n$

จะเรียกสมาชิก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ของปริภูมิเวกเตอร์ n มิติว่าเป็นจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ n มิติ

การดำเนินการ

นิยาม 3.1.7
กำหนด $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เราจะนิยามการดำเนินการบนเวกเตอร์ดังนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์

$\bar{u} = \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$

การบวกเวกเตอร์

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า k เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $k\bar{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_3)$

การดำเนินการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เราเรียกว่า **การดำเนินการมาตรฐาน (Standard operations)** บน $\mathbb{R}^n$

เวกเตอร์ศูนย์บน $\mathbb{R}^3$ แทนด้วย $\bar{0}$ หมายถึงเวกเตอร์ $(0, 0, \ldots, 0)$

นิเสธของเวกเตอร์ $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$ โดยที่

$-\bar{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

ในทางเรขาคณิต เราไม่สามารถแสดงให้เห็นตำแหน่งของจุดในปริภูมิที่มีมิติมากกว่า 3 ได้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถที่จะสร้างและกำหนดสมบัติสำหรับปริภูมิ n มิติ ได้

สมบัติของการดำเนินการสำหรับเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

Properties of vector Operations in *n*-Space

ทฤษฎีบท 3.1.8

ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ k,m เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$
2. $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
3. $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
4. มี $\bar{0}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ซึ่งทำให้ $\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}+\bar{0}=\bar{u}$
5. สำหรับ $\bar{u}$ จะมี $-\bar{u}$ ใน $\mathbb{R}^n$ ทำให้ $\bar{u}+(-\bar{u})=(-\bar{u})+\bar{u}=\bar{0}$
6. $k\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$
7. $(km)\bar{u}=k(m\bar{u})=m(k\bar{u})$
8. $k(\bar{u}+\bar{v})=k\bar{u}+k\bar{v}$
9. $(k+m)\bar{u}=k\bar{u}+m\bar{u}$
10. $1\bar{u}=\bar{u}$

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.1.9

ถ้า $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $0\bar{v}=0$
2. $k\bar{v}=0$
3. $-1\bar{v}=-\bar{v}$

ผลรวมเชิงเส้น (Linear Combinations)

การดำเนินการบนเวกเตอร์เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ เวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์ของการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์จะอยู่ในรูปแบบที่เรียกว่าผลรวมเชิงเส้น

นิยาม 3.1.10

ให้ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ เรากล่าวว่า $\bar{w}$ เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n$ ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้าสามารถเขียน

$$\bar{w}=k_1\bar{v}_1+k_2\bar{v}_2+\ldots+k_n\bar{v}_n$$

เมื่อ $k_1,k_2,\ldots,k_n$ เป็นสเกลาร์ และเรียกสเกลาร์ว่าสัมประสิทธ์ของผลรวมเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า มีสเกลาร์ c_1,c_2,c_3 ที่ทำให้

$$c_1(1,-1,0)+c_2(3,2,1)+c_3(0,1,4)=(-1,1,19)$$

แบบฝึกทักษะ 3.1

1. กำหนด $\bar{u} = (1,3,3)$, $\bar{v} = (-1,0,3)$ และ $\bar{w} = (1,-2,3)$ จงหา
    a. $2\bar{u} + \bar{v}$
    b. $\bar{u} + \bar{w} - \bar{v}$
    c. $2\bar{v} - 3\bar{w}$

2. จากข้อ 1 จงหาเวกเตอร์ $\bar{x}$ ที่ทำให้ $2\bar{u} - \bar{v} + \bar{x} = 7\bar{x} + \bar{w}$

3. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนจริง a,b,c ที่ทำให้ $a(-2,9,6) + b(-3,2,1) + c(1,7,5) = (0,5,4)$

4. จงหาจำนวนจริง a,b,c ทั้งหมด ที่ทำให้ $a(1,2,0) + b(2,1,1) + c(0,3,1) = (0,0,0)$

3.2 ผลคูณภายใน นอร์มและระยะทาง

การคูณของเวกเตอร์ที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือการคูณภายในแบบยุคลิด ซึ่งจะนิยามดังนี้

การคูณกันของเวกเตอร์มีด้วยกัน 3 ชนิด คือ

1. **การคูณภายใน** (Inner Product)
2. **การคูณภายนอก** (Outer Product)
3. **การคูณคอร์ส** (Cross Product)

การคูณคอร์สกำหนดในระบบ 3 มิติเท่านั้น ผลการคูณคอร์สของสองเวกเตอร์จะได้เวกเตอร์ใหม่ที่ตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ทั้งสอง โดยทิศของเวกเตอร์ผลลัพธ์หาได้จากการใช้กฎมือขวาโดยขนาดของเวกเตอร์มีขนาดเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ทั้งสองเป็นด้านประกอบ (หาความรู้เพิ่มเติม)

การคูณภายนอก (Outer Product) อาจเรียกว่า ผลคูณแดด (Dyad Product) นักเรียนสามารถหาความรู้เพิ่มเติมเองได้

นิยาม 3.2.1

ถ้า $\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ และ $\bar{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ แล้วผลคูณภายใน (Euclidean inner product) ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ $n=2$ หรือ $n=3$ ผลคูณภายในก็คือผลคูณจุด (dot product)

หมายเหตุ - เราจะเขียน $\bar{u}^2$ แทน $\bar{u}\cdot\bar{u}$

- ผลคูณภายในสามารถเขียนได้ในรูปการคูณของเมทริกซ์ได้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}^T\bar{u}$

สมบัติของผลคูณภายใน (Properties of Euclidean inner product)

ทฤษฎีบท 3.2.2

ถ้า $\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n),\bar{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ และ $\bar{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k,m\in\mathbb{R}$ แล้ว

1. $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$
2. $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$
3. $k(\bar{u}\cdot\bar{v})=(k\bar{u})\cdot\bar{v}=\bar{u}\cdot(k\bar{v})$
4. $(k\bar{u})\cdot(m\bar{v})=km(\bar{u}\cdot\bar{v})$
5. $\bar{u}\cdot\bar{u}\ge 0$ และ $\bar{u}\cdot\bar{u}=0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}=\bar{0}$

พิสูจน์ สมมุติ $\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\bar{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ และ $\bar{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k,m\in\mathbb{R}$

1. จะแสดง $\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$

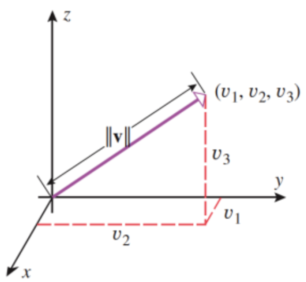
2. จะแสดง $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$

3. จะแสดง $k(\overline{u}\cdot\overline{v})=(k\overline{u})\cdot\overline{v}=\overline{u}\cdot(k\overline{v})$

4. จะแสดง $(k\overline{u})\cdot(m\overline{v})=km(\overline{u}\cdot\overline{v})$

5. จะแสดง $\overline{u}\cdot\overline{u}\geq 0$ และ $\overline{u}\cdot\overline{u}=0$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{u}=\overline{0}$

นอร์มและระยะทาง



นอร์มของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$

นิยาม 3.2.3

กำหนด $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ นอร์มของ $\overline{u}$ เขียนแทนด้วย $\|\overline{u}\|$ นิยามโดย

$$\|\overline{u}\|=\sqrt{\overline{u}\cdot\overline{u}}=\sqrt{\overline{u}^2}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}$$

นิยาม 3.2.4

กำหนด $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ และ $\overline{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ระยะทางแบบยุคลิด (Euclidean distance) หรือระยะทางระหว่าง $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})$ นิยามโดย

$$\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})=\|\overline{u}-\overline{v}\|$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\overline{u}=(2,3,-1,7),\overline{v}=(1,0,3,-5)$

จงหา $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})$

ก่อนจะศึกษาสมบัติของนอร์มและระยะทาง ขอแนะนำอสมการ Cauchy-Schwarz ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.5 อสมการ Cauchy-Schwarz

ถ้า $\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ และ $\bar{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว

$$\left|\bar{u}\cdot\bar{v}\right| \le \left\|\bar{u}\right\|\left\|\bar{v}\right\|$$

พิสูจน์

สมบัติพื้นฐานของนอร์ม

ทฤษฎีบท 3.2.6

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k\in\mathbb{R}$ แล้ว

1. $\left\|\bar{u}\right\| \ge 0$
2. $\left\|\bar{u}\right\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}=\bar{0}$
3. $\left\|k\bar{u}\right\| = \left|k\right|\left\|\bar{u}\right\|$

พิสูจน์ สมมุติ $\bar{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ และ $\bar{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k\in\mathbb{R}$

1. จะแสดง $\left\|\bar{u}\right\| \ge 0$

เราจะขยายความรู้เกี่ยวกับความยาวของเวกเตอร์ ระยะทางระหว่างเวกเตอร์ นอร์มของเวกเตอร์ มุมระหว่างเวกเตอร์ไปสู่ปริภูมิ n มิติ

ระยะทางแบบยุคลิด คือระยะทางปกติระหว่างจุดสองจุดในแนวเส้นตรง ซึ่งอาจสามารถวัดได้ด้วยไม้บรรทัด มีที่มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่เรียกว่าแบบยุคลิด เนื่องจากเป็นการวัดระยะทางในปริภูมิแบบยุคลิด (หรือแม้แต่ปริภูมิผลคูณภายใน) คือไม่มีความโค้ง และไม่สามารถทำให้โค้งงอ และการใช้สูตรนี้วัดระยะทางทำให้กลายเป็นปริภูมิอิงระยะทาง ค่าประจำ (norm) ที่เกี่ยวข้องก็จะเรียกว่าเป็นค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) เช่นกัน

2. จะแสดง $\|\bar{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{0}$

3. จะแสดง $\|k\bar{u}\| = |k|\|\bar{u}\|$

ทฤษฎีบท 3.2.7 อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.8 Parallelogram Equation for Vectors

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 + \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = 2\left(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2\right)$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.9

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ แล้ว

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{4}\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\bar{u}-\bar{v}\|^2$$

พิสูจน์

สมบัติของระยะทางแบบยุคลิด

ทฤษฎีบท 3.2.10

ถ้า $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) \ge 0$
2. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{v}$
3. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) = \mathrm{d}(\bar{v},\bar{u})$
4. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{w}) \le \mathrm{d}(\bar{u},\bar{w}) + \mathrm{d}(\bar{w},\bar{v})$

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกทักษะ 3.2

1. จงหานอร์มของเวกเตอร์
   a. $\bar{u} = (-4, 3)$
   b. $\bar{v} = (2, 2, 2\sqrt{2})$
   c. $\bar{w} = (5, 6, 0)$

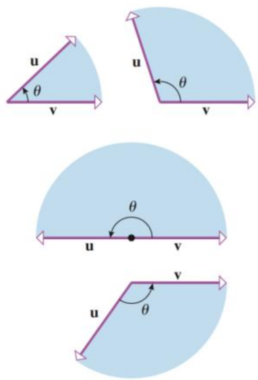
2. เรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)
   a. ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

   b. ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\bar{u}$

3. จงหาระยะทางแบบยุคลิดระหว่าง $\bar{u} = (1, -1, -4, 2, 3)$ และ $\bar{v} = (2, 3, 4, 5, 6)$

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว
   (1.) $\mathrm{d}(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$
   (2.) $\mathrm{d}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{v}$
   (3.) $\mathrm{d}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathrm{d}(\bar{v}, \bar{u})$
   (4.) $\mathrm{d}(\bar{u}, \bar{w}) \leq \mathrm{d}(\bar{u}, \bar{w}) + \mathrm{d}(\bar{w}, \bar{v})$

3.3 เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก (Orthogonality)



มุมระหว่างเวกเตอร์

มุมระหว่างเวกเตอร์สามารถใช้หลักการของผลคูณด็อท (dot product) ของ 2-3 มิติ คือ

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta$$

ดังนั้น มุมโคซายน์ระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ คือ

$$\cos\theta=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}$$

นิยาม 3.3.1

เวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ จะเรียกว่าเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันเมื่อ

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=0$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $\bar{u}=(-2,3,-1,4),\bar{v}=(1,2,0,-1)$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

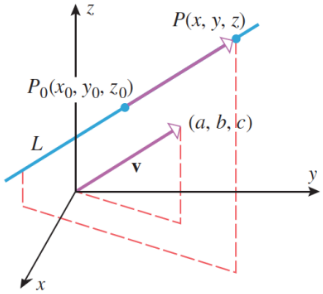
ทฤษฎีบท 3.3.2

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน $\mathbb{R}^n$ แล้ว

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2=\|\bar{u}\|^2+\|\bar{v}\|^2$$

พิสูจน์

3.4 เรขาคณิตของระบบสมการเชิงเส้น



เส้นตรงใน 3 มิติสามารถสร้างได้จากการกำหนดจุดที่อยู่บนเส้นตรงและเวกเตอร์ระบุทิศทางของเส้นตรง ถ้าให้เส้นตรง L เป็นเส้นตรงใน 3 มิติผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = (a, b, c)$ แล้วสมการของเส้นตรง L หมายถึงความสัมพันธ์ของจุด $P(x, y, z)$ ใดๆ บน L ที่หาได้จากความจริงที่ว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_0P}$ จะขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ นั่นคือ จะมีสเกลาร์ t ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc)$$

นั่นคือ

$$x - x_0 = ta, y - y_0 = tb \text{ และ } z - z_0 = tc$$

ทฤษฎีบท 3.4.1 สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงใน 3 มิติ
ถ้า a, b, c เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์ กราฟของชุดของสมการ

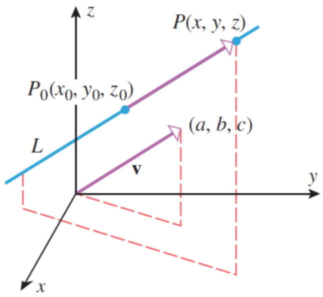
$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad (-\infty < t < \infty)$$

เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = (a, b, c)$

เราจะเรียกสมการ $x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad (-\infty < t < \infty)$ ว่าสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(2, 2, -3)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(2, 4, -1)$ และ $B(5, 0, 7)$ และตรวจสอบว่าเส้นตรงดังกล่าวตัดระนาบ XY หรือไม่



สมการเวกเตอร์ และสมการสมมาตรของเส้นตรง

เราสามารถใช้สัญลักษณ์ทางเวกเตอร์ในการเขียนแทนสมการเส้นตรงได้ จากภาพ ให้เวกเตอร์ $\mathbf{r} = (x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดปลาย $P(x, y, z)$ และ $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยัง จุดปลาย $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ แล้วสมการเส้นตรงข้างต้นสามารถเขียนได้ในรูปของ $\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t\mathbf{v}$ หรือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{v}$$

เรียกว่า **สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง**

นอกจากนี้จากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง เราสามารถหาความสัมพันธ์ของทั้งสามสมการได้เป็น

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

เรียกว่า **สมการสมมาตรของเส้นตรง**

นิยาม 3.4.2 สมการเส้นตรงใน $\mathbb{R}^n$
เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ t เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วสมการ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{v}$$

เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดสิ้นสุดของ $\mathbf{r}_0$ และขนานกับ $\mathbf{v}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(-1, 2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v} = (-2, 3)$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,-3)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}=(4,-5,1)$

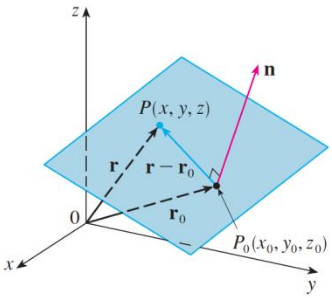
ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้

$$\begin{cases} 4x+y-11z=39 \\ 3x+y-7z=26 \\ 2x-8z=26 \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแสดงว่าเส้นตรงในตัวอย่างที่ 3 เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 4

สมการระนาบ

ในระบบพิกัดมุมฉากสองมิติ เราสามารถหาสมการของเส้นตรงได้จากความชันและจุดที่กำหนดให้ สำหรับในระบบพิกัดฉากสามมิติ หากกำหนด **ความเอียง (inclination)** และจุดให้ แล้วเราจะสามารถสร้างสมการระนาบได้ ความเอียงในที่นี้หมายถึงความเอียงของระนาบ ซึ่งจะบอกได้โดยเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์และตั้งฉากกับระนาบนั้น เรียกเวกเตอร์ลักษณะนี้ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)**



สมการของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และมีความเอียง $\mathbf{n} = (a, b, c)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) หมายถึงความสัมพันธ์ของจุด $P(x, y, z)$ ใดๆ บนระนาบ ซึ่งหาได้จากความจริงที่ว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_0P}$ และ $\mathbf{n}$ จะต้องตั้งฉากกัน นั่นคือ

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

เราเรียกสมการนี้ว่า สมการระนาบ point-normal form

ทฤษฎีบท 3.4.3 สมการทั่วไปของระนาบใน 3 มิติ
ถ้า a, b, c เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์ กราฟของสมการ

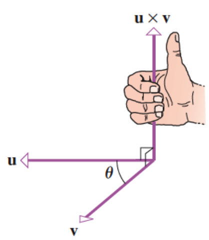
$$ax + by + cz + d = 0$$

เป็นระนาบที่มีเวกเตอร์ $\mathbf{n} = (a, b, c)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)

เราจะเรียกสมการ $ax + by + cz + d = 0$ ว่าสมการทั่วไปของระนาบ ซึ่งสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นของตัวแปร x, y, z

ตัวอย่างที่ 7 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $(1, -2, 5)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{n} = (4, 2, -3)$

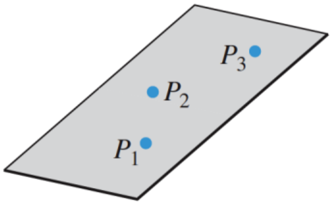
ระนาบใน 3 มิติ เราอาศัย **เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector)** เพื่อหาสมการระนาบ การหาเวกเตอร์ดังกล่าวใช้ความรู้เกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ ดังนี้



นิยาม 3.4.4
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product หรือ vector product) ของ $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ หมายถึงเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

ทฤษฎีบท 3.4.5
ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน แล้ว $\bar{u} \times \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$



ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P_1(1,2,-1), P_2(2,3,1)$ และ $P_3(3,-1,2)$

สมการเวกเตอร์ และสมการอิงตัวแปรเสริมของระนาบ

เราสามารถใช้สัญลักษณ์ทางเวกเตอร์ในการเขียนแทนสมการระนาบได้ จากภาพ ให้เวกเตอร์ $\mathbf{r} = (x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดปลาย $P(x,y,z)$ และ $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยัง จุดปลาย $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ ให้ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและอยู่บนระนาบ แล้วสมการระนาบข้างต้นสามารถเขียนได้ในรูปของ**สมการเวกเตอร์** ได้ดังนี้

$$\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

นิยาม 3.4.6 สมการระนาบใน $\mathbb{R}^n$

เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ โดยที่ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ t_1, t_2 เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วสมการ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

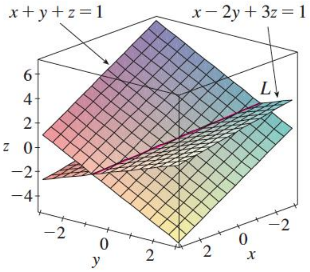
เป็นสมการระนาบที่ผ่านจุดสิ้นสุดของ $\mathbf{r}_0$ และขนานกับ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการเวกเตอร์ และสมการอิงตัวแปรเสริมของของระนาบ $9x+y-5x-16=0$

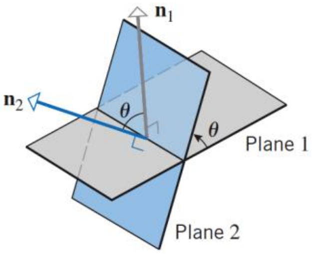
ตัวอย่างที่ 10 จงหาสมการเวกเตอร์ และสมการอิงตัวแปรเสริมของของระนาบ $x-y+2z=5$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา สมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม ของคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้

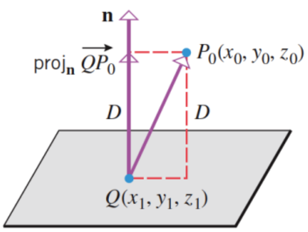
$$\begin{cases} 9x+y-5z=16 \\ 18x+2y-10z=32 \\ 27x+3y-15z=48 \end{cases}$$



ตัวอย่างที่ 12 จงหา สมการเส้นตรงที่เป็นรอยตัดของระนาบ $z+y+z=1$ และ $z-2y+3z=1$



ตัวอย่างที่ 13 จงหามุมระหว่างระนาบ $z+y+z=1$ และ $z-2y+3z=1$



ระยะห่างระหว่างจุดและระนาบ

ทฤษฎีบท 3.4.7

ระยะห่างระหว่างจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และระนาบ $ax+by+cz+d=0$ แทนด้วย D โดยที่

$$D=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $(1,-4,3)$ และระนาบ $2x-3y+6z+1=0$

แบบฝึกทักษะ 3.4

1. จงหาจงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ ที่กำหนดให้
    a. $P(-4,1), \bar{u} = (0,-8)$

    b. $P(-9,3,4), \bar{u} = (-1,6,0)$

2. จงหาจงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริมของระนาบที่ผ่านจุดกำเนิดและตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{u} = (4,0,-5)$

3. จงหาคำตอบทั่วไปของระบบสมการต่อไปนี้ และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 6x + 4y - 2z = 0 \\ -3x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{และ} \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 6x + 4y - 2z = 4 \\ -3x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

4.4 การแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแปลงเชิงเส้นและสมบัติของการแปลงเชิงเส้น เราจะพบว่าการแปลงเชิงเส้นสามารถแทนด้วยเมตริกซ์ ดังนั้นในการศึกษาสมบัติของการแปลงเชิงเส้นเราจะพิจารณาสมบัติของเมตริกซ์ซึ่งเป็นตัวแทนของการแปลงเชิงเส้นแทน

จะเรียก $f(x) = x^2$ ว่าฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง (real valued function of real variable) เนื่องจากฟังก์ชันเช่นนี้มีค่าเป็นจำนวนจริง และตัวแปร x เป็นตัวแปรที่ใช้แทนจำนวนจริง และจะเรียก ฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2 + y^2$ ว่าฟังก์ชันค่าจริงของสอง ตัวแปร จำนวน จริง (real valued function of two real variables)

ฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}$

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^2$ ไป $\mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^3$ ไป $\mathbb{R}$

ฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน f คือ $\mathbb{R}^n$ และเรนจ์คือ $\mathbb{R}^m$ จะเรียก f ว่าการแปลง (transformation หรือ map) $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ในกรณีที่ $m = 1$ จะเรียกว่าฟังก์ชันค่าจริง และในกรณีที่ $m = n$ จะเรียก $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ว่าตัวดำเนินการบน $\mathbb{R}^n$ (operator $\mathbb{R}^n$)

ในกรณีทั่วไปให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปรจำนวนจริง โดยที่

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า แต่ละ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ จะให้ค่า $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ ใน $\mathbb{R}^m$ จากสมการทั้ง m สมการข้างต้น เราจะแทนการแปลงข้างต้นด้วยสัญลักษณ์ T ดังนั้น $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ และ

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

ตัวอย่างที่ 15 ระบบสมการ

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_2 \\ w_2 &= x_1 x_2 \\ w_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

เป็นการแปลงจาก $\mathbb{R}^2$ ไป $\mathbb{R}^3$ เขียนแทนด้วย $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

โดยที่ $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 - x_2)$

ตัวอย่างเช่น $T(1,2) = (3,2,-1)$

การแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

โดยทั่วไป การแปลง $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ จะเป็นการแปลงเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น โดยที่

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

และเรียก $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ว่าการแปลงเชิงเส้นจาก $\mathbb{R}^n$ ไป $\mathbb{R}^m$

นั่นคือ เราสามารถเขียน $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

หรือสามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

หรือ $$\mathbf{w} = A\mathbf{x}$$

และจะเรียก $A = \left[a_{ij}\right]$ ว่าเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลง T

Some Notational Matters

ถ้า A เป็นเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลง T อาจเขียนแทนการแปลงด้วย

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

บางครั้งอาจเขียนแทนเมทริกซ์มาตรฐานด้วย $\left[T\right]$ นั่นคือ

$$T(\mathbf{x}) = \left[T\right]\mathbf{x}$$

เราได้ความสัมพันธ์ข้างต้นดังนี้

$$\left[T_A\right] = A$$

ตัวอย่างที่ 16 การแปลง $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ โดยที่

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ w_3 &= 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

เป็นการแปลงเชิงเส้น และสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

เรขาคณิตของการแปลง

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาการแปลงใน $\mathbb{R}^2$ และ $\mathbb{R}^3$ ในเชิงเรขาคณิตได้แก่ การสะท้อน การฉายเงา การหมุน การยืดขยายและการหด

ตารางที่ 1 การสะท้อนใน $\mathbb{R}^2$

ตัวดำเนินการ (operator)	ภาพ	สมการ	เมทริกซ์มาตรฐาน
การสะท้อนข้ามแกน y			
การสะท้อนข้ามแกน x			
การสะท้อนข้ามเส้นตรง $y = x$			

ตารางที่ 2 การสะท้อนใน $\mathbb{R}^3$

ตัวดำเนินการ (operator)	ภาพ	สมการ	เมทริกซ์มาตรฐาน
การสะท้อนข้ามระนาบ xy			
การสะท้อนข้ามระนาบ xz			
การสะท้อนข้ามระนาบ yz			

ตารางที่ 3 การฉายเงา (projection) ใน $\mathbb{R}^2$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) บนแกน x			
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) บนแกน y			

ตารางที่ 4 การฉายเงา (projection) ใน $\mathbb{R}^3$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) บนระนาบ xy			
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) บนระนาบ xz			
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) บนระนาบ yz			

ตารางที่ 5 การหมุนใน $\mathbb{R}^2$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การหมุนทวนนาฬิกาเข็มรอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ			
การหมุนตามเข็มนาฬิการอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ			

ตารางที่ 6 การหมุนใน $\mathbb{R}^3$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การหมุนทวนนาฬิกาเข็มรอบแกนบวก x ด้วยมุม θ			
การหมุนทวนนาฬิกาเข็มรอบแกนบวก y ด้วยมุม θ			
การหมุนทวนนาฬิกาเข็มรอบแกนบวก z ด้วยมุม θ			

ตารางที่ 7 การยืดและการหดใน $\mathbb{R}^2$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การหดด้วยค่าคงที่ k ใน $\mathbb{R}^2$ $(0 \le k \le 1)$			
การยืดด้วยค่าคงที่ k ใน $\mathbb{R}^2$ $(k \ge 1)$			

ตารางที่ 7 การยืดและการหดใน $\mathbb{R}^3$

ตัวดำเนินการ (operator)	**ภาพ**	**สมการ**	**เมทริกซ์มาตรฐาน**
การหดด้วยค่าคงที่ k ใน $\mathbb{R}^3$ $(0 \le k \le 1)$			
การยืดด้วยค่าคงที่ k ใน $\mathbb{R}^3$ $(k \ge 1)$			

แบบฝึกทักษะ 4.3

1. จงหาเมทริกซ์ $A = \left[T\right]$ ของการแปลงเชิงเส้น $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เมื่อกำหนดและ

$$T(1,0,0) = (7,11), T(0,1,0) = (6,9) \text{ และ } T(0,0,1) = (-13,17)$$

2. กำหนดการแปลง $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

จงพิจารณาว่าการแปลงที่กำหนดให้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าใช่ จงหาเมทริกซ์ของการแปลง

3. ให้ $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m \in \mathbb{R}^n$ กำหนดการแปลง $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_m\overline{v}_m$$

จงพิจารณาว่าการแปลงที่กำหนดให้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่
ถ้าใช่ จงหาเมทริกซ์ของการแปลง (ตอบในเทอม $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m$)

4. กำหนดให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแบบหมุนเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบด้วยมุม 45° ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จงหาเมทริกซ์ของการแปลง T

5. กำหนดให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแบบหมุนเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบด้วยมุม θ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จงหาเมทริกซ์ของการแปลง T

6. จงหาตัวผกผันของการแปลงเชิงเส้น

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 7x_2 \\ y_2 &= 3x_1 + 20x_2 \end{aligned}$$

7. กำหนดให้ $A = \left[T\right]$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) จงอธิบายตัวดำเนินการที่กำหนดให้ในเชิงเรขาคณิต

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

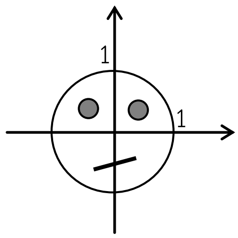
c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

f. $A = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$

8. จงหาภาพที่เกิดขึ้นเมื่อใช้การแปลงเชิงเส้น $T(\overline{x}) = A\overline{x}$ บนภาพที่กำหนดให้



a. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$

กำหนดให้ $T:R^4 \to R^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้นโดยกำหนด $T(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_1,a_1+a_3,a_3+a_4)$

กำหนดให้ S_4 , S_3เป็นฐานหลักธรรมชาติของ R^4 ,R^3 ตามลำดับ และ

$S' = \{(1,0,0,1),(0,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$, $S'_1 = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$

เป็นฐานหลักสำหรับ R^4 , R^3 ตามลำดับ

จงหา เมตริกซ์ T ที่ขึ้นต่อฐานหลัก S' และ S_3

จงหา เมตริกซ์ T ที่ขึ้นต่อฐานหลัก S' และ S'_1

จงหา $T(2,1,-1,3)$ โดยใช้เมตริกซ์ที่ได้ในหัวข้อ 1.1และ 1.2

และจงเปรียบเทียบคำตอบที่หาได้จากนิยาม T ที่กำหนดให้

กำหนดให้ $T:R^2 \to R^2$ นิยามโดย $T(x,y) = (x+2y,2x-3y)$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

จงหา เมตริกซ์ของ T ที่ขึ้นกับฐานหลักต่อไปนี้

$\{(1,0),(0,1)\}$ และ $\{(2,1),(-1,0)\}$

$\{(1,1),(-2,3)\}$ และ $\{(1,1),(0,2)\}$

กำหนดให้ $T:R^2 \to R^3$ กำหนดโดย $T(x,y) = (x+y , 2x-y , x+2y)$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จงหาเมตริกซ์ของ T ที่ขึ้นกับฐานหลักต่อไปนี้

3.1 $\{(1,1),(-1,2)\}$ และ $\{(1,0,0),(1.0.1),(0,1,1)\}$

3.2 $\{(1,0),(0,1)\}$ และ $\{(1,0,1),(0,1,1)(1,1,0)\}$

4. จงหาเมตริกซ์ที่เปลี่ยนฐานจากฐานหลัก A ไปยังฐานหลัก B

4.1 $A = \{(1,0),(0,1)\}$; $B = \{(1,1),(-1,2)\}$

4.2 $A = \{(1,-1),(2,1)\}$; $B = \{(1,2),(3,3)\}$

4.3 $A = \{(1,1),(-1,2)\}$; $B = \{(1,0),(0,1)\}$

4.4 $A = \{(1,2),(-3,1)\}$; $B = \{(1,-1),(2,1)\}$