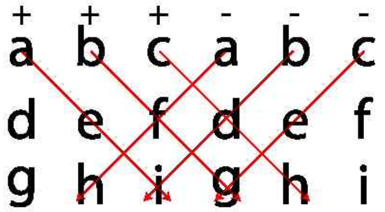
Two

ตัวกำหนด

Determinant



aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg

ฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ จะมีเพียงค่าเดียวบนเมทริกซ์มิติ $n \times n$ เหนือริงสลับที่ใดๆ (commutative ring) โดยเฉพาะเมื่อฟังก์ชันนี้นิยามไว้บนริงสลับที่ ที่เป็นฟีลด์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

▶What you should learn

- จะหาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มิติ 2x2 อย่างไร
- จะหาดีไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์จตุรัสได้อย่างไร
- จะหาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มิติจัตุรัสใดๆ อย่างไร

▶Why you should learn it

ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มักใช้ในสาขาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ ดีเทอร์มินันต์บางแบบมีประโยชน์เมื่อเปลี่ยนตัวแปรในวิชาแคลลูลัส

ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) คือฟังก์ชันหนึ่งที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ n ในมิติ $n \times n$ ของเมทริกซ์จัตุรัส A ส่วนความหมายทางเรขาคณิตเบื้องต้น ดีเทอร์มิแนนต์คือตัวประกอบมาตราส่วน (scale factor) ของปริมาตร เมื่อ A ถูกใช้เป็นการแปลงเชิงเส้น (นักเรียนจะศึกษาเกี่ยวกับการแปลงเชิงเส้นในบทที่ 4) นอกจากนี้ดีเทอร์มิแนนต์เป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับทั้งพีชคณิตเชิงหลายเส้น (multilinear algebra) และแคลคูลัส ซึ่งใช้สำหรับกฎการแทนที่ (substitution rule) ในตัวแปรบางกลุ่ม

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. เมทริกซ์ที่จะนำมาหาดีเทอร์มินันต์ได้ต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสแล้ว ดีเทอร์มินันต์ของ A จะเขียนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

ดีเทอร์มินันต์เมทริกซ์มิติ 2 X 2

กำหนดเมทริกซ์มิติ 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ

$$\det(A) = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ดีเทอร์มินันต์เมทริกซ์มิติ 3X 3

กำหนดเมทริกซ์มิติ 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ

$$\det(A) = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

เราสามารถหาดีเทอร์มินันต์โดยเขียนหลักที่ 1 และ หลัก 2 เพิ่มต่ออีก 2 หลังจากนั้นใช้หลักการคูณทแยง นำจำนวนทั้งหมดมาบวกกัน และจำนวนที่เกิดจากการคูณทแยงขึ้นไปลบออก ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

ซึ่ง $\det(A) = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\det(A)\det(B)\det(C)$ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\det(A), \det(B)$ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

2.1 การหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

ก่อนอื่นนักเรียนรู้จัก Minor และ Cofactor ก่อน ซึ่งจะขอนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 Minor
กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ โดยที่ $n \geq 2$
1. ไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}
2. ไมเนอร์ของ a_{ij} คือดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก

ตัวอย่างที่ 3 จงหาไมเนอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.1.2 Cofactor
กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ โดยที่ $n \geq 2$
1. โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij}
2. ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ $(-1)^{i+j} M_{ij}$

ตัวอย่างที่ 4. จงหาโคแฟกเตอร์ทั้งหมดของ A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

เมื่อเรารู้จัก Minor และ Cofactor จะสามารถหาค่าดีเทอร์มินันต์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ โดย a_{ij} เป็นสเกลาร์ และ $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ จะได้

1. $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}, \forall i$ เมื่อกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ i
2. $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}, \forall j$ เมื่อกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ j

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\det(A)$ โดยใช้โคแฟกเตอร์

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\det(A)$ โดยใช้โคแฟกเตอร์

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

นิยาม 2.1.3 แอดจอยท์ (Adjoint)
กำหนด $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ และ C_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}
แอดจอยท์ของ A (adjoint of A) เขียนแทนด้วย $adj(A)$ หมายถึงเมทริกซ์รูปต่อไปนี้

$$adj(A)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 2.1.2
ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ a_{ij} เป็นสเกลาร์ และ $n\in\mathbb{Z}, n\geq 2$ แล้ว

(1) $A\,adj(A)=adj(A)A=\det(A)I_n$

(2) ถ้า $\det(A)\neq 0$ แล้ว $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 6 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

แล้ว $b_{31} + b_{23}$ มีค่าเท่าใด

▶What you should learn
- จะใช้กฎของคราเมอร์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

นอกจากเราจะใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation) ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อแรก เรายังสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อีก ดังต่อไปนี้

การแก้ระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

ทฤษฎีบท 2.2.2 กฎของคราเมอร์
ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ โดยที่ $\det(A) \neq 0$ แล้วระบบสมการที่เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร และ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นค่าคงตัว
โดยที่

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

มีคำตอบคือ $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วย $\mathbf{b}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคำตอบของระบบสมการที่กำหนด โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาคำตอบของระบบสมการที่กำหนด โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 20 \\ 7x + y + z = 23 \end{cases}$$

แบบฝึกทักษะ 2.1

ข้อ 1-4 จงหา Minor และ Cofactors ทั้งหมดของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

ข้อ 5-6 จงหาค่าดีเทอมินันท์

5. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   7.1. จงหาไมเนอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

   7.2. จงหาโคแฟกเตอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

   7.3. จงหา $\det(A)$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ และเปรียบเทียบคำตอบจากการใช้สูตร

   7.4. จงหา A^{-1} จากดีเทอร์มินันต์

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

ข้อ 9-11 จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

9. $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 3 - 2y = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 2x + 2y = 19 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ -x + 4y + 2z = -4 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$

2.2 การหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยการลดรูปตามแถว

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า A มีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทุกตัว แล้ว $\det(A)=0$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.2.2
ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $\det(A)=\det(A^T)$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.2.3
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

(1) ถ้าคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยค่าคงที่ c แล้วดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่เท่ากับ $c\det(A)$

(2) ถ้าสลับที่กันระหว่างแถวสองแถวใดๆ (หรือหลักสองหลักใดๆ) ของ A

(3) แล้วดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่เท่ากับ $-\det(A)$

(4) ถ้าเปลี่ยนแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A โดยใช้ค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์คูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถว (หรือหลัก) ที่ต้องการเปลี่ยนนั้นโดยบวกสมาชิกในลำดับเดียวกันเข้าด้วยกันแล้วใช้ผลบวกแทนที่สมาชิกเดิมแล้วดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่เท่ากับ $\det(A)$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.2.4

ให้ E เป็นเมทริกซ์มูลฐาน (Elementary Matrix)

(1) ถ้า E เป็นผลจากการคูณเมทริกซ์ I_n ด้วยค่าคงที่ k แล้ว $\det(E) = k$

(2) ถ้า E เป็นผลจากการสลับแถวของสองแถวใดใน I_n แล้ว $\det(E) = -1$

(3) ถ้า E เป็นผลจากการคูณแถวใดแถวหนึ่งแล้วบวกกับแถวอื่นใน I_n แล้ว $\det(E) = 1$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของ A โดยการลดรูปตามแถว

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของ A โดยการลดรูปตาม**คอลัมน์**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกทักษะ 2.2

1. จงแสดงว่า $\det(A) = \det(A^T)$ เมื่อ

   1.1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ต่อไปโดยวิธีตรวจวิเคราะห์ ใช้ความรู้จากทฤษฎีบทที่ได้เรียน

   2.1. $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

   2.2. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

   2.3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   2.4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   2.5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. จงหาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์ที่กำหนดให้ แล้วหาค่าดีเทอร์มินันต์

3.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3.2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. กำหนด $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ จงหา

4.1. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

4.2. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

4.3. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.3 และ 2.2.4

2.3 สมบัติของดีเทอร์มินันต์ฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 2.3.1 สมบัติของดีเทอร์มินันต์
ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และ k เป็นสเกลาร์แล้ว
(1) $\det(kA) = k^n \det(A)$
(2) $\det(\mathrm{A}^k) = \left[\det(A)\right]^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.2
ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และมีสมาชิกแตกต่างกันเพียงแถวเดียว แถวที่แตกต่างกันคือแถวที่ r ซึ่งสมาชิกแถวที่ r ของ C เกิดจากการบวกกันของสมกชิกแถวที่ r ของ A และ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน แล้ว
$\det(C) = \det(A) + \det(B)$
ผลลัพธ์ดังกล่าวยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนจากแถวเป็นหลัก

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.3.3
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และ E เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่มีมิติ $n \times n$ แล้ว
$\det(EA) = \det(E)\det(A)$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.4
เมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.5
ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ แล้ว $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 12 $\det(ABCD)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.3.6

ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ แล้ว $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.7

กำหนดให้ A มีมิติ $n \times n$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) A มีอินเวร์สการคูณ

(2) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบ

(3) $A_{RR} = I_n$ โดยที่ A_{RR} เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวของเมทริกซ์ A

(4) สามารถเขียน A ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานได้

(5) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เป็นระบบคล้องจอง สำหรับทุก $\mathbf{b}$ ที่มีมิติ $n \times 1$

(6) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบเดียว สำหรับทุก $\mathbf{b}$ ที่มีมิติ $n \times 1$

(7) $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่า $\det(A)$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่า $\det(A)$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 15 กำหนด $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

ระบบสมการเชิงเส้นในรูป $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

การประยุกต์ในพีชคณิตจำนวนมากเกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของสมการ

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

ระบบสมการนี้สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$A\mathbf{x} - \lambda I_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ดังแสดงให้เห็น ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ และเป็นระบบคล้องจอง (มีคำตอบชัดแจ้งเป็นคำตอบหนึ่งของสมการ)

เราต้องการหาค่าสเกลาร์ λ ที่ทำให้ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ มีคำตอบอื่นนอกเหนือจากคำตอบชัดแจ้ง (คำตอบชัดแจ้งเป็นคำตอบที่ไม่มีความสำคัญ เพราะทุกค่าเป็นศูนย์) เรียก**คำตอบไม่ชัดแจ้ง (nontrivial solutions)** ต่อไปเราจะเรียกสเกลาร์ λ ว่า**ค่าเฉพาะ (eigenvalue)** ของ A และคำตอบไม่ชัดแจ้งที่ได้จะเรียกว่า**เวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector)** ของ A ที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ เรื่องเหล่านี้จะศึกษาอย่างละเอียดต่อไป

คำตอบไม่ชัดแจ้งของ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ได้จากการพิจารณาตัวผกผันการคูณของ $A - \lambda I_n$ นั้นคือ $A - \lambda I_n$ ต้องหาตัวผกผันการคูณไม่ได้ ดังนั้นเราจะพิจารณาค่าดีเทอร์มินันต์ จึงกล่าวได้ว่าระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ จะมีคำตอบไม่ชัดแจ้งก็ต่อเมื่อ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

เรียกสมการลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

แบบฝึกทักษะ 2.3

1. จงหาค่า $\det(kA)$ เมื่อ

    1.1. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, k=2$

    1.2. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}, k=-2$

2. จงหาค่า $\det(AB)$ เมื่อ $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3. จงอธิบายว่าเหตุใด $\det(A)=0$ เมื่อกำหนด $A=\begin{bmatrix}-2 & 8 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 10 & 6 & 5\\ 4 & -6 & 4 & -3\end{bmatrix}$ โดยไม่ต้องคำนวณ

4. จงหาค่า k ที่ทำให้เมทริกซ์เหล่านี้ไม่มีตัวผกผันการคูณ

4.1. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

4.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

5. ในแต่ละระบบสมการเชิงเส้น จงหา

5.1. สมการลักษณะเฉพาะ

5.2. ค่าเฉพาะ

5.3. เวกเตอร์เฉพาะ

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

2.4 วิธีการทางคอมบินาทอริกส์เพื่อหาดีเทอร์มินันต์

วิธีการเรียงสับเปลี่ยน

นิยาม 2.4.1
วิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3,\ldots,n\}$ หมายถึง การนำจำนวนเต็ม $1,2,3,\ldots,n$ มาจัดเรียงโดยไม่ขาดตัวใดและไม่มีตัวใดซ้ำกัน

จะเขียนแทนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ด้วยสัญลักษณ์ $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ โดยที่ $p_1,p_2,\ldots,p_n$ เป็นจำนวนเต็มในเซต $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ที่ไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 17 วิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2\}$ มี 2 วิธี
คือ $(1,2)$ และ $(2,1)$

ตัวอย่างที่ 18 วิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3\}$ มี 6 วิธี
คือ

Note: จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3,\ldots,n\}$ เท่ากับ $n!$ วิธี

การผกผัน (inversion)

นิยาม 2.4.2
ถ้า $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3,\ldots,n\}$ **การผกผัน (inversion)** จะปรากฏใน P ก็ต่อเมื่อ มีจำนวน p_i และ p_j ใน P ซึ่ง $p_i>p_j$ แต่ p_i อยู่ในตำแหน่งหน้า p_j

จะนับจำนวนการผกผันใน $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ ดังนี้

- หาจำนวนเต็มใน P ซึ่งน้อยกว่า p_1 แต่อยู่หลัง p_1 สมมติให้มี m_1 จำนวน
- หาจำนวนเต็มใน P ซึ่งน้อยกว่า p_2 แต่อยู่หลัง p_2 สมมติให้มี m_2 จำนวน

$\vdots$ $\vdots$

- หาจำนวนเต็มใน P ซึ่งน้อยกว่า p_{n-1} แต่อยู่หลัง p_{n-1} สมมติให้มี m_{n-1} จำนวน

จะได้ว่าจำนวนของการผกผันใน $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ เท่ากับ $m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 19 จงหาจำนวนของการผกผัน
$(6,2,5,3,1,4)$
$(7,6,5,4,3,2,1)$
$(4,2,1,3)$

วิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่ วิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่

นิยาม 2.4.3
วิธีการเรียงสับเปลี่ยน P จะเรียกว่า **วิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่ (even permutation)** เมื่อจำนวนการผกผันใน P เป็นจำนวนคู่ และจะเรียกว่า **วิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่ (odd permutation)** เมื่อจำนวนการผกผันใน P เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่างที่ 20 จงแยกประเภทของวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซตของจำนวนเต็ม $\{1,2,3\}$

วิธีการเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนการผกผัน	ประเภทคู่ / คี่
$(1,2,3)$	0	คู่

ดีเทอร์มินันต์โดยวิธีการทางคอมบินาทอริกส์

นิยาม 2.4.4 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$
ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det$ นิยามว่า

$$\det(A) = \sum (\pm)\ a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$$

เมื่อ $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1,2,\dots,n\}$ และมีวิธีการเลือกเครื่องหมาย $\pm +$ ดังนี้
เลือก + เมื่อ $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่
เลือก − เมื่อ $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่
เรียก $\det(A)$ ว่าดีเทอร์มินันต์ของ A

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มิติ 3×3 โดยวิธีการทางคอมบินาทอริกส์

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยวิธีการทางคอมบินาทอริกส์

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยวิธีการทางคอมบินาทอริกส์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มิติ 4×4

แบบฝึกทักษะ 2.4

1. จงหาจำนวนของการผกผันของวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1,2,3,4,5\}$ ที่กำหนดให้
    1.1. $(1,2,3,4,5)$
    1.2. $(5,4,1,2,3)$
    1.3. $(4,1,3,2,5)$
    1.4. $(3,2,5,4,1)$
    1.5. $(2,1,4,3,5)$

ข้อ 1-8 จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์

2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$