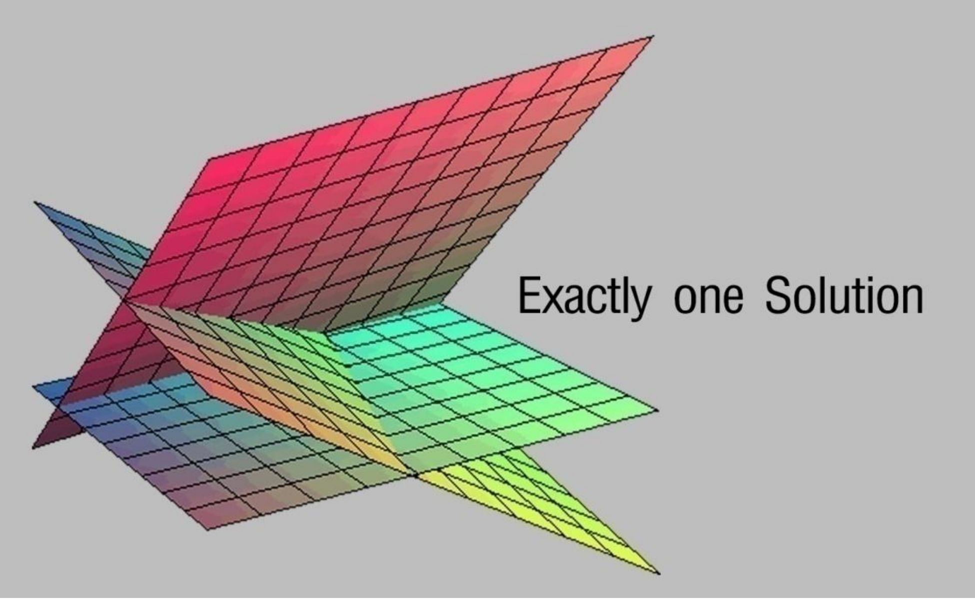


One

ระบบสมการเชิงเส้น และเมทริกซ์

System of Linear Equations
and Matrices

การประยุกต์ใช้อย่างหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้นคือการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร กรณีที่ง่ายที่สุดคือเมื่อมีจำนวนที่ไม่ทราบค่า (ตัวแปร) เท่ากับจำนวนของสมการ ดังนั้นเราสามารถแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น n สมการ สำหรับจำนวนที่ไม่ทราบค่า n ตัว โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น

▶ **เราจะเรียนอะไร**

- จะใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (elementary row operation) กับเมทริกซ์
- จะใช้เมทริกซ์และการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
- จะใช้เมทริกซ์และการกำจัดเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination) เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
- รู้จักเมทริกซ์มูลฐาน และหา A^{-1} ของ A โดยใช้เมทริกซ์มูลฐาน

▶ **เราจะเรียนเพื่ออะไร**

เราสามารถใช้เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นตั้งแต่ ตัวแปรขึ้นไปได้ 2ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาหลากหลายชนิด ทั้งในด้านวิทยาศาสตร์ และแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

1.1 ระบบสมการเชิงเส้น

System of Linear Equations

การศึกษาเรื่องระบบสมการเชิงเส้น และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นถือว่าเป็นเรื่องพื้นฐานที่สำคัญ ในหัวข้อนี้จะแนะนำให้นักเรียนได้รู้จักระบบสมการเชิงเส้น พร้อมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น

นิยาม 1.1.1
กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ **สมการเชิงเส้น** คือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร และ $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ เป็นสเกลาร์ใน F

คำตอบของสมการเชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ หมายถึงลำดับของสเกลาร์ ซึ่งเมื่อแทนในสมการแล้ว จะได้สมการที่เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1. ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการเชิงเส้น

$2x + 3y = -3$

$4x - 3y = 2z + 5$

$ix + (3 + 2i)y = 0$

ตัวอย่างที่ 2. ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการ ไม่เชิงเส้น

$$x^2 - 5y = 3$$

$$x + \sin(y) = 0$$

$$e^x + y = 1$$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$4x - 2y = 4$$

$$x_1 - 7x_2 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$

ระบบสมการเชิงเส้น

นิยาม 1.1.2

กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ ระบบสมการเชิงเส้น คือชุดของสมการที่อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรซึ่งมีจำนวนจำกัด และ a_{ij}, b_i เป็นสเกลาร์ใน F

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

หมายถึงลำดับของสเกลาร์ ซึ่งเมื่อแทนในสมการแล้ว จะได้สมการที่เป็นจริง ทุกสมการ

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ถ้ากำหนดระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมทริกซ์เมทริกซ์แต่งเติม ได้ดังนี้

เมทริกซ์แต่งเติม

(Augmented Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & d_3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

(Coefficient Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4. จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

ระบบสมการ

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 4z = 6 \end{cases}$$

วิธีทำ จัดตัวแปรของระบบสมการที่กำหนดให้ตรงกัน จะได้

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x \qquad - 4z = 6 \end{cases}$$

ดังนั้น เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 5 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 2 & 0 & -4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ R_n เพื่อแทนแถวแต่ละแถวของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น แถวที่ 1 จะใช้สัญลักษณ์ R_1 ดังนั้นเมทริกซ์แต่งเติมในตัวอย่างข้างต้น อาจเขียนให้ชัดเจนขึ้น เพื่อเน้นแต่ละแถวของเมทริกซ์ อาจเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 5 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 2 & 0 & -4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation)

ความรู้พื้นฐานในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นคือ การสร้างระบบสมการเชิงเส้นขึ้นมาใหม่ที่ง่ายต่อการหาคำตอบยิ่งขึ้น โดยที่ระบบสมการเชิงเส้นที่สร้างขึ้นมาใหม่นี้ยังคงมีเซตคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเดิม ระบบสมการเชิงเส้นใหม่ที่สร้างขึ้นนี้ อาศัยการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้ เพื่อกำจัดตัวแปร

1. การคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
2. การสลับกันระหว่างสมการสองสมการ
3. การบวกสมการหนึ่งด้วยผลคูณของสมการอื่นกับค่าคงตัว

เนื่องจากแต่ละแถวของเมทริกซ์แต่งเติม เกิดจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงตัวของแต่ละสมการที่สมนัยกัน ดังนั้นการดำเนินการ 3 ชนิดบนสมการดังกล่าวจะเหมือนกับการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้บนเมทริกซ์แต่งเติม

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation: ERO)

1. การคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
2. การสลับกันระหว่างแถวสองแถวของเมทริกซ์แต่งเติม
3. การบวกแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยผลคูณของแถวอื่นกับค่าคงตัว

▶ Row Equivalent
เมทริกซ์ A และ B มีมิติ m x n จะกล่าวว่า A สมมูลตามแถว (row equivalent) กับ B ก็ต่อเมื่อ B เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบน A เป็นจำนวนครั้งจำกัด จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$

ตัวอย่างที่ 5. การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น

1. คูณแถวแรกด้วยค่าคงที่ $\frac{1}{2}$

Original Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

New Row-Equivalent Matrix

$$\frac{1}{2}R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. สลับกันระหว่างแถวแรกและแถวที่สองของเมทริกซ์แต่งเติม

Original Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

New Row-Equivalent Matrix

$$\begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. บวกแถวที่สามด้วย -2 เท่าของแถวแรก

Original Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

New Row-Equivalent Matrix

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวก จะขอกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

1. mR_i แทนการนำค่าคงตัว m ไปคูณแถวที่ i
2. R_{ij} แทนการสลับกันระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j
3. $mR_j + R_i$ แทนการบวกแถวที่ i ด้วยผลคูณของแถวที่ j กับ m

ตัวอย่างที่ 6. ลองพิจารณาเปรียบเทียบการหาคำตอบโดยระบบสมการเชิงเส้น และการดำเนินการบนเมทริกซ์ดังนี้

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

เมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

บวกสมการแรกเข้ากับสมการที่สอง

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

บวกแถวแรกเข้ากับแถวที่สอง

$$\begin{array}{r} \\ R_2 + R_1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

บวก -2 เท่าของสมการแรกเข้ากับสมการที่ 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

บวก -2 เท่าของแถวแรกเข้ากับแถวที่ 3

$$\begin{array}{r} \\ \\ -2R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

บวกสมการที่สองเข้ากับสมการที่ 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

บวกแถวที่สองเข้ากับแถวที่ 3

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_2 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

คูณสมการที่ 3ด้วย $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

คูณแถวที่ 3 ด้วย $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ขั้นตอนนี้ เราบอกได้ว่า $z = 2$ ซึ่งสามารถแทนค่าย้อนกลับเพื่อคำนวณหา x และ y

$$\begin{aligned} y + 3(2) &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

แทนค่า $y = -1$ และ $z = 2$

$$\begin{aligned} x - 2(-1) + 3(2) &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

คำตอบคือ $x = 1,\ y = -1$ และ $z = 2$

อย่าลืมตรวจสอบคำตอบ โดยการแทนค่า x, y และ z ลงในระบบสมการเชิงเส้นเดิม

เมทริกซ์สุดท้ายที่ได้ในตัวอย่างข้างต้น เรียกว่าอยู่ใน **ลักษณะขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form)** ซึ่งมีสมบัติดังนี้

เราสามารถใช้เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวและขั้นบันไดลดรูปตามแถวในการหาคำตอบของระบบสมการ เราจำเป็นต้องใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นนั้น เพื่อให้ได้เมทริกซ์ใหม่ซึ่งเมทริกซ์ใหม่จะสมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ต้นแบบ คำตอบของระบบสมการจึงเป็นคำตอบเดียวกัน

ลักษณะขั้นบันไดตามแถวและลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Row-Echelon Form and Reduced Row-Echelon Form)

เมทริกซ์อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form) มีสมบัติดังนี้

1. แถวที่สมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ จะอยู่ด้านบนของเมทริกซ์ และแถวที่สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์จะอยู่ด้านล่างของเมทริกซ์
2. ในแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ จะมีสมาชิกตัวแรกเป็น 1 เรียก**สมาชิกนำ** (leading entry)
3. แถวสองแถวใดที่ติดกันและมีสมาชิกนำ สมาชิกนำในแถวล่างจะอยู่ในหลักที่อยู่ทางขวามือของหลักของสมาชิกนำในแถวบน

เมทริกซ์อยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form)
เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form) และในหลักใดที่มีสมาชิกนำ สมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์ จะเรียกว่าอยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form)

▶ **Technology**
หากนักเรียนเข้าใจ Concept ของการดำเนินการตามแถวเบื้องต้น นักเรียนสามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณได้ ซึ่งมีหลายชนิดไม่ว่าจะเป็นเครื่องคำควณเชิงกราฟฟิค หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งมี Application ด้านเมทริกซ์รวมทั้งการดำเนินการตามแถวไว้อย่างครบถ้วนซึ่งจะขอแนะนำเครื่องคำนวณ Ti-92 โปรแกรม Maple และ Matlab

ตัวอย่างที่ 7. Row-Echelon Form

เมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ในข้อ b. และ d. อยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form) ด้วย ส่วนเมทริกซ์ต่อไปนี้ ไม่อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 8. จงทำให้เมทริกซ์ e. และ f. ในตัวอย่างข้างต้นอยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

แบบฝึกทักษะ 1.1

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้น

________(1). $7x-5y+\sqrt{2}z=3$

________(2). $x^{-2}-y+8z=5$

________(3). $x^{-2}-y+8z=5$

________(4). $x-y+z=\sin k$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์

________(5). $kx_1-\frac{1}{k}x_2=9$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์

________(6). $\pi x_1-\sqrt{2}x_2+\frac{4}{5}x_3=1$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

(1). $7x-5y=3$

(2). $3x_1-5x_2+4x_3=7$

(3). $3v-8w+2x-y+4z=0$

3. (a) จงสร้างระบบสมการเชิงเส้นของตัวแปร x,y ที่มีคำตอบทั่วไป $x=5+2t, y=t$

(b) จงแสดงว่าคำตอบทั่วไป $x=t, y=\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}$ เป็นคำระบบสมการที่นักเรียนสร้างขึ้นใน (a) ด้วย

4. จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ระบบสมการ เมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -x+3y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+10y-3z=10 \\ 3x-2y+5z=5 \\ \quad -7x+y=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ \ \ x-7y-2z=2 \\ \quad -7x+z=0 \end{cases}$$

5. จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นจากเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เมทริกซ์แต่งเติม ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 2 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & -2 & \vdots & 7 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 9 & 5 & 6 & 3 & \vdots & -7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

6. กำหนดให้ a,b,c เป็นสเกลาร์ จงแสดงว่าระบบสมการ

$$\begin{cases} x+y+2z=a \\ x \qquad +z=b \\ 2x+y+3z=c \end{cases}$$

เป็นระบบสมการที่มีคำตอบก็ต่อเมื่อ $c=a+b$

1.2 การกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian Elimination)

เราอาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่รวดเร็ว โดยเพียงแต่หาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติมเท่านั้น หลังจากนั้นก็ใช้วิธี**แทนย้อนกลับ (back-substitution)** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

▶ **คำตอบของระบบสมการ**

ระบบสมการเชิงเส้นแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ ประเภทที่ไม่มีคำตอบเรียกว่าระบบคล้องจอง และประเภทที่ไม่มีคำตอบเรียกว่าระบบไม่คล้องจอง นอกจากนั้นระบบที่เป็นประเภทคล้องจองยังสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือ แบบที่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว และแบบที่มีคำตอบเป็นอนันต์ เครื่องมือที่จะช่วยตรวจสอบว่าระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้เป็นแบบใด ที่สะดวกก็คือใช้เมทริกซ์ในการตรวจสอบ

ตัวอย่างที่ 9. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน

สมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 10. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน ระบบสมการเชิงเส้น

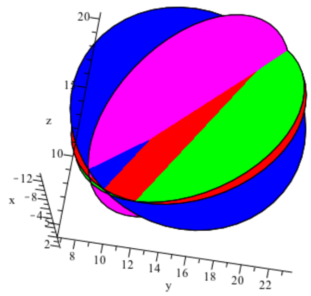
$$\begin{cases} & y & +z & -2w & = & -3 \\ x & +2y & -z & & = & 2 \\ 2x & +4y & +z & -3w & = & -2 \\ x & -4y & -7z & -\ w & = & -19 \end{cases}$$

วิธีทำ

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถแบ่งได้ออกเป็น 3 แบบคือ **ไม่มีคำตอบ** ประเภทนี้จะเกิดขึ้นเมื่อสมการใดสมการหนึ่งไม่มีคำตอบ หรือเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน ประเภท**มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว** ประเภทนี้เกิดขึ้นเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงที่ต่างกันและตัดกัน และสุดท้ายเป็นประเภท**มีคำตอบเป็นอนันต์** ประเภทนี้จะเกิดขึ้นเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงเดียวกันระบบสมการเชิงเส้นทุก

ระบบสมการเชิงเส้นจะต้องเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งในสามอย่างนี้ คือไม่มีคำตอบ มีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบอนันต์ ระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเรียกว่า**ระบบคล้องจอง** (consistent) ระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีคำตอบเรียกว่า**ระบบไม่คล้องจอง** (inconsistent)



ระบบสมการในตัวอย่างที่ 11 เป็นสมการที่ไม่มีคำตอบ เห็นได้จากระนาบทั้ง 4 ระนาบไม่มีจุดตัดร่วมกัน เรียกว่า**ระบบไม่คล้องจอง** (inconsistent)

(ระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ)

ตัวอย่างที่ 11. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน

$$\begin{cases} x \quad -y \quad +2z = 4 \\ x \qquad\quad + \ z = 6 \\ 2x \ -3y \ +5z = 4 \\ 3x \ +2y \ - \ z = 1 \end{cases}$$

วิธีทำ

การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination)

เราอาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้อีกวิธีหนึ่ง วิธีนี้เรียกว่า การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination) โดยเพียงแต่หาเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติมเท่านั้นจากนั้นเราสามารถอ่านค่าของตัวแปรได้ทันที อาจสรุปวิธีการได้ดังนี้ ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกของแถวแรกให้เป็น 1 และทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกของแถวอื่นให้เป็น 0ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่สองของแถวที่สองให้เป็น 1 และทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่สองของแถวอื่นให้เป็น 0 ทำเช่นนี้ซ้ำกับแถวอื่นๆ

ตัวอย่างที่ 12. จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

ระบบสมการเชิงเส้น

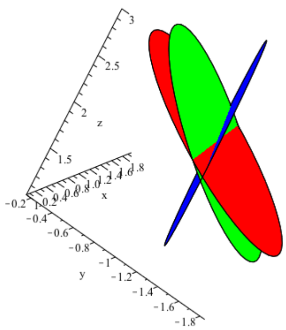
$$\begin{array}{rrrrr} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +\ 6z & = & 24 \\ 3x & +y & -2z & = & 4 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 13. จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x \quad -2y \quad +3z = 9 \\ -x \quad +3y \quad \quad = -4 \\ 2x \quad -5y \quad +5z = 17 \end{cases}$$

วิธีทำ



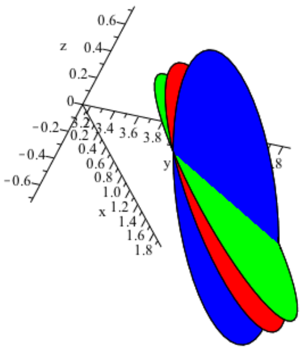
คำตอบของระบบสมการในตัวอย่างที่ 13 เป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ 3 ระนาบ เรียกระบบสมการเช่นนี้ว่า**ระบบคล้องจอง** (consistent)

(ระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์)

ตัวอย่างที่ 14. จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 2x & +7y & +12z & = & 30 \end{cases}$$

วิธีทำ



คำตอบของระบบสมการในตัวอย่างที่ 14 เป็นเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ 3 ระนาบ เรียกระบบสมการเช่นนี้ว่า**ระบบคล้องจอง** (consistent)

ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems)

เราจะศึกษาลักษณะเฉพาะของระบบสมการเชิงเส้นบางประการ

นิยาม

ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

เรียกว่าระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems)

จะพบว่าระบบสมการนี้จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบคือ (0, 0, 0, 0, ..., 0) เรียกคำตอบนี้ว่า**คำตอบชัดแจ้ง (trivial solution)** นอกจากนี้เราพบว่าระบบสมการแบบนี้เป็นระบบคล้องจอง นั่นคือคำตอบจะมีเพียงสองแบบเท่านั้น คือ เป็นระบบที่มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว หรือเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

ตัวอย่างที่ 15. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$
\begin{cases}
x + 2y + 3z = 0 \\
-x + 3y + 2z = 0 \\
2x + y - 2z = 0
\end{cases}
$$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.2.1
ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems) ที่มีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการจะเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

ตัวอย่างที่ 16. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+3y+2z=0 \end{cases}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 17. จงหาคำตอบของระบบสมการ

อย่างไรก็ตามระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems) ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการอาจเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์ได้

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \\ -x-11y+6z=0 \end{cases}$$

วิธีทำ

แบบฝึกทักษะ 1.2

ข้อ 1-4 ให้นักเรียนหาสมาชิกของเมทริกซ์ในช่องว่างที่เกิดจากการดำเนินการตามแถว

7. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & ? & \frac{8}{3} \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & ? & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & ? & -7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & ? & ? \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & ? & ? \\ 0 & 3 & ? & ? \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & ? & ? \end{bmatrix}$

ข้อ 5-8 ให้นักเรียนหาการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเมื่อกำหนดเมทริกซ์ต้นแบบและเมทริกซ์ใหม่มาให้ โดยที่เมทริกซ์ใหม่เกิดจากการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบนเมทริกซ์ต้นแบบ

	เมทริกซ์ต้นแบบ	**เมทริกซ์ใหม่**
5.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$
8.	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

ข้อ 9-11 ให้นักเรียนตอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถวหรือไม่ ถ้าใช่ให้นักเรียนใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

12. กำหนดเมทริกซ์ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ที่สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ A ซึ่งเกิดจากการดำเนินการตามแถวต่อไปนี้

12.1 $-2R_1 + R_2$

12.2 $-3R_1 + R_3$

12.3 $-R_2 + R_3$

12.4 $-\frac{1}{5}R_2$

12.5 $-2R_2 + R_1$

ข้อ 13-14 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน

13. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 6y = 16 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

ข้อ 15-16 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

15. $\begin{cases} 3x - 2y = -27 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 4y = -34 \end{cases}$

ข้อ 17-18 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียนหรือการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

17. $\begin{cases} -x + y - z = -14 \\ 2x - y + z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -28 \\ 4y + 2z = 0 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$

1.3 การดำเนินการบนเมทริกซ์ (Operations with Matrices)

▶ เราจะเรียนอะไร

- จะพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่เท่ากัน
- จะบวก-ลบเมทริกซ์ และคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
- จะคูณเมทริกซ์สองเมทริกซ์
- จะใช้การดำเนินการของเมทริกซ์ออกแบบและแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

▶ เราจะเรียนเพื่ออะไร

การดำเนินการของเมทริกซ์สามารถใช้ในการออกแบบและแก้ปัญหาในชีวิตได้จริง

การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equality of Matrices)

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะได้ชื่อว่าเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามดังนี้

นิยาม 1.3.1
ถ้า $A=[a_{ij}]$ และ $B=[b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ จะกล่าวว่า $A=B$ ก็ต่อเมื่อ A,B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุกๆ ค่าของ i และ j

ตัวอย่างที่ 18. จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a^2 & 6 \\ b^2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4+b \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$a^2=25$ และ $a-2=-7$

นั่นคือ $a=\pm 5$ และ $a=-5$

ดังนั้น $a=-5$

และจาก $b^2=4$ และ $4+b=6$

$b=\pm 2$ และ $b=2$

ดังนั้น $b=2$

ตัวอย่างที่ 19. จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2^a & \log b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & (\log b)^2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $2^a=16$ นั่นคือ $a=4$

และ $\log b=(\log b)^2$

$$(\log b)^2-\log b=0$$

$$\log b(\log b-1)=0$$

$$\log b=1\ ,\ 0$$

$$b=10\ ,\ 1$$

ตัวอย่างที่ 20. จงตรวจสอบว่า $A\overset{?}{=}B$ หรือไม่ เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B=\begin{bmatrix} \sqrt{4} & a^0 \\ \log_a 1 & \ln e^3 \end{bmatrix}$$

การบวกเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
(Matrix Addition and Scalar Multiplication)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ ดังนี้

นิยาม 1.3.2 การบวกเมทริกซ์
ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 21. การบวกเมทริกซ์

1). $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0-1 & 1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

2). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

นิยาม 1.3.3 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นสเกลาร์แล้ว $cA=[ca_{ij}]_{m\times n}$

สัญลักษณ์ $-A$ หมายถึงการนำสเกลาร์ -1 คูณกับเมทริกซ์ A ดังนั้น $-A=(-1)A$ เราสามารถนิยามการลบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

นิยาม 1.3.4 การลบเมทริกซ์
ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $A-B=A+(-B)$

ตัวอย่างที่ 22. กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ และ } E=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1. จงหา $2A$,$-5B$, $3C, A+C$

2. จงหา $A+B$, $B+A$, $D+E$

เมื่อสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นสเกลาร์ ผลพลอยได้ที่ตามมาก็คือสมบัติทางพีชคณิตของฟิลด์ ดังนั้นสมบัติของการบวกเมทริกซ์และการคูณด้วยสเกลาร์ต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท 1.3.5 สมบัติของทางพีชคณิตของเมทริกซ์

ให้ X, Y และ Z เป็นเมทริกซ์ $M_{m\times n}$ และ k, m เป็นสเกลาร์

(1) $X + Y$ เป็นเมทริกซ์ $M_{m\times n}$ สำหรับทุก $X, Y \in M_{m\times n}$

(2) $X + Y = Y + X$ สำหรับทุก $X, Y \in M_{m\times n}$

(3) $X + (Y + Z) = (Y + X) + Z$ สำหรับทุก $X, Y, Z \in M_{m\times n}$

(4) มี $\mathbf{0}$ ใน $M_{m\times n}$ ซึ่งทำให้ $\mathbf{0} + X = X + \mathbf{0} = X$ สำหรับทุก $X \in M_{m\times n}$

(5) แต่ละ X ใน $M_{m\times n}$ จะมี $-X$ ใน $M_{m\times n}$ ทำให้ $X + (-X) = -X + X = \mathbf{0}$

(6) kX เป็นเวกเตอร์ใน $M_{m\times n}$ สำหรับทุก $X \in M_{m\times n}$

(7) $k(X + Y) = kX + kY$

(8) $(k + m)X = kX + mX$

(9) $(km)X = k(mX)$

(10) $1X = X$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 23. **Solving a Matrix Equation**

กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $2X+A=B$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ (Matrix Multiplication)

นิยาม 1.3.6 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณ AB คือ เมทริกซ์ $AB=C=[c_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติ 3x3 และเมทริกซ์ B มีมิติ 3x3 แล้วนักเรียนสรุปได้ไหมว่า ผลคูณของเมทริกซ์ AB จะมีมิติเท่าไร นักเรียนทราบได้อย่างไร และหากเมทริกซ์ C มีมิติ 3x5 เมทริกซ์ AC และ CA จะหาค่าได้หรือไม่ ถ้าได้จะมีมิติเป็นอย่างไร

ตัวอย่างที่ 24. กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -5 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & -8 & 0\\ 1 & 10 & 7\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}9 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}$$

จงหา AB, BA, AD, DA

เมทริกซ์เอกลักษณ์

ทฤษฎีบท 1.3.8
เมทริกซ์เอกลักษณ์คือเมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้สัญลักษณ์คือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเมทริกซ์เอกลักษณ์ เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์มีสมบัติดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3.7 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์
ให้ X, Y และ Z เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติทำให้แต่ละข้อมีความหมาย และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ

(1). $X(YZ) = (XY)Z$

(2). $k(XY) = (kX)Y = X(kY)$

(3). $X(Y+Z) = XY + XZ$

(4). $(X+Y)Z = XZ + YZ$

(5). $I_n X = X = XI_n$

พิสูจน์

จากตัวอย่างที่ 24

$$DA=\begin{bmatrix}9&2\\3&0\\1&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&6\\-5&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&60\\6&18\\-38&30\end{bmatrix}$$

สามารถเขียนแต่ละหลักของ DA เป็นการรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์หลักของ D ดังนี้

$$\begin{bmatrix}8\\6\\38\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}9\\3\\1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2\\0\\8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}60\\18\\30\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}9\\3\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\0\\8\end{bmatrix}$$

การแบ่งส่วนของเมทริกซ์ (Partitioned Matrices)

สำหรับเมทริกซ A ขนาด $m\times n$ หากแบงสวนเมทริกซ A เปนเมทริกซยอย เรียกวาเมทริกซแบบบล็อก (Block Matrix) ที่มีขนาดเล็กกวาเมทริกซ์ A เช่น

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{23}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1&C_2&C_3&C_4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\end{bmatrix}$$

ทรานสโพสของเมทริกซ์ (Transpose of Matrix)

ทรานสโพสของเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 1 และนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 2 และทำเช่นนี้จนหมดทุกแถว แทนทรานสโพสของ A ด้วย A^T หรือ A^t

นิยาม 1.3.8
ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^t โดยที่ $A^t=[b_{ij}]_{n\times m}=[a_{ji}]_{n\times m}$

ตัวอย่างที่ 25. ทรานสโพสของเมทริกซ์

กำหนด $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&5\end{bmatrix}_{2\times 3}$ จะได้ $A^t=\begin{bmatrix}2&1\\3&1\\4&5\end{bmatrix}_{3\times 2}$

ตัวอย่างที่ 26. จงหาทรานสโพสของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A=\begin{bmatrix}2&6\\-5&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&2\\5&7\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}5&-8&0\\1&10&7\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}9&2\\3&0\\1&8\end{bmatrix}\text{ และ } E=\begin{bmatrix}3&5\\2&-3\\0&7\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.3.9
ให้ A,B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติทำให้แต่ละข้อมีความหมาย และ k เป็นสเกลาร์ใดๆ

1. $(A^t)^t=A$
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$ และ $(A-B)^t=A^t-B^t$
3. $(kA)^t=kA^t$
4. $(AB)^t=B^tA^t$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

การประยุกต์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

เราสามารถแทนระบบสมการเชิงเส้นด้วยการใช้เมทริกซ์คูณเมทริกซ์ เช่น ถ้ามีระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว สามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

เราสามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เมื่อ

A คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$\mathbf{x}$ คือเมทริกซ์ตัวแปร

$\mathbf{b}$ คือเมทริกซ์ค่าคงตัว

กำหนดระบบสมการ

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

จะได้สมการเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

เรียก $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์ตัวแปร

และเรียก $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์ค่าคงตัว

จากตัวอย่างนักเรียนจะเห็นได้จัดว่าสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการของเมทริกซ์ได้ เมทริกซ์ที่เป็นส่วนสำคัญในการหาคำตอบของระบบสมการ คือเมทริกซ์ที่เกิดจาก A และ $\mathbf{b}$ ซึ่งเรียกว่าเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $[A:\mathbf{b}]$ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นทำได้โดยใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (ERO) กับเมทริกซ์แต่งเติม ดังที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วในหัวข้อแรก

เมทริกซ์แต่งเติมคือ $[A:\mathbf{b}]$

$$[A:\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

หากใช้การกำจัดเกาส์-จอร์แดนจะได้

$$[A:\mathbf{b}] \sim [I:\mathbf{x}] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้คือ $x = 4$ และ $y = 3$ ซึ่งเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกทักษะ 1.3

1. จงตรวจสอบว่า A, B เท่ากันหรือไม่ เมื่อกำหนด $x^3+x^2-x-1=0$ และ

$$A=\begin{bmatrix} x^3+x^2 & x^2-x \\ 1-x^2 & x-x^2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} x+1 & 1-x^3 \\ x^3-x & x^3-1 \end{bmatrix}$$

2. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ใดเท่ากันบ้าง เมื่อกำหนด $x^2-x+1=0$ และ

$$A=\begin{bmatrix} x^2 & x-x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} x-x^2 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & x^2+1 \end{bmatrix}$$

3. กำหนด $A=-2[a_{ij}]_{2\ x\ 2}$ โดยที่ $a_{ij}=i-3j$ จงหาผลบวกของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A

4. กำหนด $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ C เมื่อ $C=2A+4B$

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $3X + 2(A - B) = 2(X + 2A)$ จงหาเมทริกซ์ X

6. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ AB

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^2 และ A^3

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^n เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $B^t A^t + C^t A^t$

10. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A^2-4A-5I$

11. กำหนด $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\end{bmatrix}$ จงหาค่า $B=-2\left[b_{ij}\right]_{2\times2}$ โดยที่ $b_{ij}\in\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $AB=BA$

12. กำหนด $A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ จงหาค่า A^{10}

13. จงหาค่าของ $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^n$

▶ เราจะเรียนอะไร

- จะแสดงว่าเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใดๆ เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน
- จะใช้สูตรในการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2x2
- จะหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ที่มีมิติมากกว่า 2x2

1.4 อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ขอกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์จัตุรัส ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.1
ถ้า R เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวที่มีมิติ $n \times n$ แล้ว R จะมีลักษณะอย่างใดอย่างหนึ่งระหว่าง R มีแถวที่เป็นศูนย์หมด หรือ R จะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

ในหัวข้อนี้ เราจะมาศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของเมทริกซ์ จะขอยกตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบกับในเรื่องระบบจำนวนจริงก่อน ดังนี้

สมมติเราต้องการหาคำตอบของสมการ $ax = b$ เราเริ่มจากนำอินเวอร์สการคูณของ a คือ a^{-1} มาคูณทางซ้ายของสมการทั้งสองข้าง (โดยที่ $a \neq 0$)

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของ a เนื่องจาก $a^{-1}a = 1$ ซึ่ง 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ ในส่วนของเมทริกซ์ อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ก็มีลักษณะคล้ายกัน ดังนี้

นิยาม 1.4.2
กำหนดให้ A, B มีมิติ $n \times n$
B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A ก็ต่อเมื่อ $AB = BA = I_n$
ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณไม่ได้ เรียก A ว่าเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)
ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณได้ เรียก A ว่าเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน (non-singular matrix)

ตัวอย่างที่ 27. จงแสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.4.3
ถ้า B และ C เป็นอินเวอร์สการคูณของ A แล้ว $B = C$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.4.4
ถ้า $A=\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้วอินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.4.5
ถ้า $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad-bc \neq 0$ แล้วอินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 28. จงหาอินเวอร์สการคูณของ A และ B เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

สมบัติของอินเวอร์สของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 1.4.5
กำหนด A,B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และมีอินเวอร์สการคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$
4. A^{n} มีอินเวอร์สการคูณและ $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ เมื่อ $n = 0,1,2,\ldots$
5. kA มีอินเวอร์สการคูณและ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์ที่ไม่เป็นศูนย์

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกทักษะ 1.4

จงแสดงว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์เอกฐาน หรือเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน และหากเป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานให้หาอินเวอร์สการคูณด้วย

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

1.5 เมทริกซ์มูลฐาน และวิธีการหา A^{-1}

ในหัวข้อนี้ เราจะเริ่มจากนิยามของเมทริกซ์ลักษณะพิเศษรูปแบบหนึ่ง ชื่อว่า เมทริกซ์มูลฐาน ดังนี้

นิยาม 1.5.1
เมทริกซ์ E ที่มี $n \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่างของเมทริกซ์มูลฐาน

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.5.2
ถ้า E เป็นเมทริกซ์มูลฐานมีมิติ $m \times m$ และ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มิติ $m \times n$ แล้วผลคูณของ EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องชนิดเดียวกับ E บน A

ตัวอย่างที่ 29. จงหาผลคูณ EA เมื่อ

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.5.3
เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สได้ และอินเวอร์สที่ได้จะเป็นเมทริกซ์มูลฐานด้วย

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 30. จงหาอินเวอร์สการคูณของของเมทริกซ์มูลฐาน E เมื่อ

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.5.4
กำหนดให้ A มีมิติ $n\times n$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A มีอินเวอร์สการคูณ
2. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A_{RR}=I_n$ โดยที่ A_{RR} เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวของเมทริกซ์ A
4. สามารถเขียน A ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานได้

พิสูจน์

พิสูจน์ (ต่อ)

วิธีการหาตัวผกผัน

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และหาอินเวอร์สได้ จากทฤษฎีบทข้างต้น เราพบว่า $A_{RR} = I_n$ แสดงว่าจะต้องมีเมทริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ทำให้

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I_n$$
$$A^{-1} A = I_n$$
$$Then \qquad A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1.$$

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดกระบวนการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ดังนี้

1. เขียน $\left[A \mid I_n\right]$
2. ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบน $\left[A \mid I_n\right]$ จนได้ $\left[I_n \mid B\right]$
3. จะได้ $B = A^{-1}$

ตัวอย่างที่ 31. จงหาอินเวอร์สการคูณของของ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.5.5

ระบบสมการเช้งเส้นจะต้องไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบเดียว หรือมีอนันต์คำตอบ

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.5.6

ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ มีมิติ $n \times n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ จะมีคำตอบเดียว คือ $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ สำหรับแต่ละ $\mathbf{b}$ ที่มีมิติ $n \times 1$ ใดๆ

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.5.7

กำหนดให้ A มีมิติ $n \times n$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A มีอินเวอร์สการคูณ
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบ
3. $A_{RR} = I_n$ โดยที่ A_{RR} เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวของเมทริกซ์ A
4. สามารถเขียน A ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานได้
5. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เป็นระบบคล้องจอง สำหรับทุก $\mathbf{b}$
6. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ มีคำตอบเดียว สำหรับทุก $\mathbf{b}$

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.5.8

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน ถ้า AB มีอินเวอร์สการคูณ แล้ว A และ B ต้องมีอินเวอร์สการคูณ

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกทักษะ 1.5

1. กำหนดเมทริกซ์

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -7 & -1\\ 8 & 1 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}8 & 1 & 5\\ 2 & -7 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -7 & -1\\ 2 & -7 & 3\end{bmatrix}$$

จงหา E_1, E_2, E_3, E_4 ที่ทำให้

$E_1A = B$

$E_2B = A$

$E_3A = C$

$E_4C = A$

2. จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 11\\ -1 & 1 & -7\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&c&0&0\\d&0&0&0\end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&a&0&0\\b&0&0&0\\0&0&0&c\\0&0&d&0\end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

3. หาคำตอบของระบบสมการโดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

$$\begin{cases}x-3y=5\\3-9y=15\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x-3y-3z=8\\3x+2y+z=5\\2x+y-z=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y+3z=-3\\-2x+y-z=6\\3x-3y+2z=-11\end{cases}$$

4. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} z - 5x + 16 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \\ 5z - 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

ค่าของ $x + y + z$ เท่ากับเท่าใด

5. จงหาค่าของ $a + b - c$ เมื่อ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

6. จงหาค่า b_{31} เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

1.6 เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

▶ เราจะเรียนอะไร

- หาตัวผกผันของเมทริกซ์ทแยงมุม
- หาตัวผกผันของเมทริกซ์สามเหลี่ยม
- หาผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยม
- นำสมบัติของเมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยมและเมทริกซ์สมมาตรไปใช้

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเมทริกซ์ที่มีลักษณะเฉพาะ โดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับการหาตัวผกผัน และเมทริกซ์ที่สำคัญในพีชคณิตเชิงเส้น

เมทริกซ์ทแยงมุม

นิยาม 1.6.1
เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i\neq j$

รูปแบบทั่วไปของเมทริกซ์ทแยงมุม $n\times n$ มิติ เป็นดังนี้

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนย่อว่า

$$D=diag[d_1,d_2,\ldots,d_n]$$

ตัวอย่างที่ 32. จงหา DA, AD, D^2, D^3, D^{-1} เมื่อกำหนด

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ผลสรุปที่เกี่ยวข้องการการคูณของเมทริกซ์ทแยงมุม และตัวผกผัน คือ

เมทริกซ์สามเหลี่ยม

นิยาม 1.6.2

กำหนดเมทริกซ์ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$ หรือ $\forall j > i$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall j > i$

ทฤษฎีบท 1.6.3

a) ทรานสโพสของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และทรานสโพสของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน
b) ผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่มีมิติเท่ากันเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่มีมิติเท่ากันเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง
c) เมทริกซ์สามเหลี่ยมจะหาอินเวอร์สการคูณได้ ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักไม่เท่ากับศูนย์
d) อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ที่หาอินเวอร์สการคูณได้) จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และอินเวอร์สการคูณของของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (ที่หาอินเวอร์สการคูณของได้) จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

พิสูจน์

เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

นิยาม 1.6.4
เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น เมทริกซ์สมมาตร เมื่อ $A^t = A$

ทฤษฎีบท 1.6.5
ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีมิติเท่ากัน และ k เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว

(1). A^t เป็นเมทริกซ์สมมาตร
(2). $A+B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
(3). $A-B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
(4). kA เป็นเมทริกซ์สมมาตร

พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.6.6
ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่หาอินเวอร์สการคูณได้แล้ว A^{-1} จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.6.7
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ แล้ว AA^t และ A^tA จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.6.8
ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่หาอินเวอร์สการคูณได้ แล้ว AA^t และ A^tA จะเป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สการคูณได้

พิสูจน์

แบบฝึกทักษะ 1.7

1. จงหาค่า $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ เมื่อกำหนด $A=\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 0 \end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

2. กำหนด $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ โดยที่ $a_{ij}\in\mathbb{R}$ และ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A

3. กำหนด $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $x_1+x_2=1$ และกำหนด $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $AX=X$

4. จงหา $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^5+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{100}$

5. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์เพื่อตรวจสอบ ทฤษฎีบท 1.6.3

6. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์เพื่อตรวจสอบ ทฤษฎีบท 1.6.6-1.6.8