Zero

อารัมภบท

Introduction

การประยุกต์ใช้อย่างหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้นคือการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร กรณีที่ง่ายที่สุดคือเมื่อมีจำนวนที่ไม่ทราบค่า (ตัวแปร) เท่ากับจำนวนของสมการ ดังนั้นเราสามารถแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น n สมการ สำหรับจำนวนที่ไม่ทราบค่า n ตัว

พีชคณิตเชิงเส้นเป็นสาขาของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวข้องกับ **ปริภูมิเวกเตอร์ (vector spaces)** ทั้งในปริภูมิที่มีมิติจำกัดและไม่จำกัด (finite and infinite dimensions) รวมทั้งจะศึกษา **การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)** และ **ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)** ซึ่งความรู้ในพีชคณิตเชิงเส้นจะเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และการประยุกต์ ตัวอย่างเช่น พีชคณิตนามธรรม (abstract algebra) ที่ศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างของพีชคณิตในรูปแบบที่ใช้สัจพจน์ (axiom) การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) ที่ศึกษาปริภูมิเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้นที่เน้นการวิเคราะห์ การศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นจะเป็นประโยชน์กับการศึกษาแคลคูลัส โดยเฉพาะการนำเมทริกซ์และสมบัติต่างๆ ไปใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (linear systems of differential equations) นอกจากนี้ แนวคิด ทฤษฎีและเทคนิคจากการศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นจะเป็นประโยชน์กับการศึกษาเราขาคณิตวิเคราะห์ วิศวกรรม ฟิสิกส์ วิทยาศาสตร์ธรรมชาติ วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ และสังคมศาสตร์ (โดยเฉพาะในด้านเศรษฐศาสตร์)

เนื้อหาของพีชคณิตเชิงเส้นจะเริ่มศึกษาจากเวกเตอร์ในระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) 2 และ 3 มิติ ซึ่งเวกเตอร์ในที่นี้ คือส่วนของเส้นที่มีทิศทางกำกับ โดยปกติแล้วจะถูกเขียนในรูปของจำนวนที่มีทิศทาง เวกเตอร์เหล่านี้สามารถบวกเข้าด้วยกันได้ และสามารถคูณด้วยสเกลาร์ได้ เวกเตอร์ลักษณะที่กล่าวถึงเป็นเวกเตอร์ในระบบยุคลิด ซึ่งทำให้เราได้ตัวอย่างของ**ปริภูมิเวกเตอร์บนเซตของจำนวนจริง** นอกจากนั้นเราจะขยายความคิดจาก 2 และ 3 มิติ ไปสู่ ปริภูมิเวกเตอร์ n มิติ เรียกว่าปริภูมิเวกเตอร์ขนาด n ในระบบยุคลิด (Euclidean n-space) จะศึกษาการแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์หนึ่งไปสู่อีกปริภูมิเวกเตอร์หนึ่ง จากนั้นเราจะขยายความรู้เพื่อศึกษาปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไป รวมทั้งปริภูมิใดๆ หรือ infinite dimension จากนั้นจะศึกษาโครงสร้างและสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์ ได้แก่ ปริภูมิย่อย (subspaces) อิสระเชิงเส้น (linear independent) การแผ่ทั่ว (span) และมูลฐาน (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์

เราจะศึกษาการประยุกต์ของพีชคณิตเชิงเส้นที่สำคัญ คือการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร โดยที่เราจะเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นให้เป็นเมทริกซ์ และจะมองว่าเมทริกซ์คือเวกเตอร์ของเวกเตอร์ (เวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์) ดังนั้นเราสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ของปริภูมิเวกเตอร์และสมบัติต่างๆ มาอธิบายคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรได้ ซึ่งหลายปรากฏการณ์ของรูปแบบคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถอธิบายได้ด้วยแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับ **ตัวกำหนด (determinant)** และ**การกำจัดตัวแปรแบบเกาส์ (Gauss elimination)** โดยคำตอบระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรจะเกี่ยวข้องกับปริภูมิเวกเตอร์เรียกว่า สเปซแถว (row space) สเปซหลัก (column space) และนัลสเปซ (null space)

ก่อนที่จะเริ่มศึกษาเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิเวกเตอร์ อย่างละเอียด จะขอยกตัวอย่างลักษณะของปริภูมิเวกเตอร์ให้พอเข้าใจ เพื่อให้ง่ายแก่การศึกษาต่อไป

เวกเตอร์ (vector) ถือได้ว่าเป็น subset ของเมตริกซ์ (matrix) โดยมีขนาดของแถวหรือคอลัมน์เป็น 1

A. เมทริกซ์และเวกเตอร์ (Matrices and Vectors)

เมทริกซ์ถูกนำมาใช้มาใช้อย่างกว้างขวาง เพียงแต่บางครั้งเราไม่ได้ชี้ชัดและเรียกมันว่าเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น ข้อมูลนักเรียนเก่าของโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่ได้ไปศึกษาต่อในระดับปริญญาโท-เอกในต่างประเทศด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (ข้อมูล ณ วันที่ 30 กันยายน 2554) รายละเอียดดังตาราง

ตารางที่ 1 ข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2554

สาขาวิชา	ในประเทศ	ต่างประเทศ	รวม
วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี	12	40	52
วิทยาศาสตร์สุขภาพ	0	1	1
อื่นๆ	1	5	6
รวม	13	46	59

ถ้าเราป้อนข้อมูลตัวเลขเหล่านี้ลงในคอมพิวเตอร์ เราต้องใส่ข้อมูลที่เป็นอาร์เรย์ (array) ขนาด 2 มิติ เรียกอาร์เรย์นี้ว่า**เมทริกซ์ (matrix)** จากตารางที่ 1 เมทริกซ์ที่แทนข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2554 เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 4×3 หรือมีมิติ 4×3 หมายถึงมีข้อมูลอยู่ 4 แถว 3 หลัก แทนด้วยเมทริกซ์ P ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 12 & 40 & 52 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ 13 & 46 & 59 \end{bmatrix}$$

โดยทั่วไปเมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก หมายถึงเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$

นิยาม 1
เซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่มีขนาด $m \times n$ เขียนแทนด้วย $M_{m \times n}$

เวกเตอร์แถว (row vector) และเวกเตอร์หลัก (column vector)

ในแต่ละแถวของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะประกอบด้วยเมทริกซ์ขนาด $1 \times n$ เรียงลำดับตั้งแต่แถวที่ 1 ถึงแถวที่ m จากบนลงล่าง ตัวอย่างเช่น จากเมทริกซ์ P ขนาด 4×3 ประกอบด้วยเมทริกซ์ขนาด 1×3 จำนวน 4 เมทริกซ์ ได้แก่

$$R_1 = \begin{bmatrix} 12 & 40 & 52 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } R_4 = \begin{bmatrix} 13 & 46 & 59 \end{bmatrix}$$

โดยทั่วไปเมทริกซ์ที่มีเพียงแถวเดียวเรียกว่า **เมทริกซ์แถว (row matrix)** หรืออาจเรียกว่า **เวกเตอร์แถว (row vector)** ในทำนองเดียวกันเรียกเมทริกซ์ที่มีหลักเดียวว่า **เมทริกซ์หลัก (column matrix)** หรืออาจเรียกว่า **เวกเตอร์หลัก (column vector)** โดยจะนับเรียงลำดับตั้งแต่หลักที่ 1 ถึงหลักที่ n จากซ้ายไปขวา

จากเมทริกซ์ P จะประกอบด้วยเวกเตอร์หลัก จำนวน 3 เวกเตอร์ ได้แก่

$$C_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 1 \\ 5 \\ 46 \end{bmatrix} \text{ และ } C_3 = \begin{bmatrix} 52 \\ 1 \\ 6 \\ 59 \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถเขียนแทน P ด้วยเวกเตอร์แถวหรือเวกเตอร์หลักได้ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} \text{ หรือ } P = \left[C_1, C_2, C_3 \right]$$

ในกรณีทั่วไป ถ้า $A_1, A_2, A_2, \ldots, A_n$ เป็นลำดับของเวกเตอร์หลัก (column vector) ที่มีขนาด $m \times 1$ แล้วสามารถเขียนแทนเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ โดยที่มี A_i เป็นสมาชิกในหลักที่ i ได้ดังนี้

$$A = \left[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \right]$$

และถ้า $B_1, B_2, B_2, \ldots, B_m$ เป็นลำดับของเวกเตอร์แถว (row vector) ที่มีขนาด $1 \times n$ แล้วสามารถเขียนแทนเมทริกซ์ B ขนาด $m \times n$ โดยที่มี B_i เป็นสมาชิกในแถวที่ i ได้ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

ข้อตกลงเบื้องต้น

เราใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ $A, B, C, \ldots$ แทนเมทริกซ์ และอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก $a, b, c, \ldots$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์ โดยที่ชื่อเมทริกซ์และชื่อสมาชิกควรสัมพันธ์กัน

ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$ แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = \left[a_{ij} \right]_{n \times m}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j

การดำเนินการเบื้องต้นบนเมทริกซ์

เรากลับไปที่ข้อมูลนักเรียนเก่าของโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่ได้ไปศึกษาต่อในระดับปริญญาโท-เอกในต่างประเทศด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หากเราสนใจศึกษาข้อมูลย้อนหลังของปีการศึกษา 2553-2554 เราสามารถสร้างเมทริกซ์ Q แทนข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2553 ได้ดังนี้

$$Q = \begin{bmatrix} 17 & 32 & 49 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 19 & 33 & 52 \end{bmatrix}$$

ผลรวมของจำนวนนักเรียนฯ ทั้งสองปีสามารถหาได้จากผลบวกของสมาชิกที่สมนัยกันตามแถวและหลัก เช่น จำนวนนักเรียนที่ศึกษาต่อทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีภายในประเทศรวมทั้งสองปีเท่ากับ $12+17=29$ คน ให้ T แทนเมทริกซ์ของข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2553-2554 จะได้

$$T = \begin{bmatrix} 29 & 72 & 101 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 32 & 79 & 111 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ T เกิดจากผลบวกของสมาชิกที่สมนัยกันตามแถวและหลักของ P และ Q เราจะใช้สัญลักษณ์แทน **การบวกเมทริกซ์ (matrix addition)** ดังนี้

$$T = P + Q$$

ในกรณีทั่วไป ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

ข้อสังเกต

(1) สัญลักษณ์บวกที่ใช้ใน $A+B$ และ $[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ แม้ว่าเขียนเหมือนกัน แต่มีความหมายต่างกัน นั่นคือใน $A+B$ แทนการบวกกันของเมทริกซ์ แต่ใน $[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ แทนการบวกกันของจำนวนจริง

(2) เห็นได้ชัดว่าเมทริกซ์ที่มีขนาดต่างกัน (มิติต่างกัน) ไม่สามารถหาผลบวกได้

(3) มิติของ $A+B$ จะเท่ากับมิติของ A และ B

จากข้อมูลจำนวนนักเรียนฯ ศึกษาต่อปีการศึกษา 2553-2554 รวมทั้งสองปี หากเราสนใจค่าเฉลี่ยของทั้งสองปี เราสามารถคูณเมทริกซ์ T ด้วย $\frac{1}{2}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\frac{1}{2}T$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}T = \begin{bmatrix} 14.75 & 36 & 50.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1.5 & 2.5 & 4 \\ 16 & 39.5 & 55.5 \end{bmatrix}$$

ในกรณีทั่วไป ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $cA=[ca_{ij}]_{m\times n}$ สำหรับการคูณในลักษณะนี้เราจะเรียกว่า **การคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)** โดยที่สเกลาร์ (scalar) จะหมายถึงจำนวนจริง c นั่นเอง นอกจากนี้เราสามารถกำหนด $A-B$ จากการคูณด้วยสเกลาร์ซึ่งจะศึกษาอย่างละเอียดในบทต่อไป

B. ฟีลด์ (Fields)

เนื้อหาของพีชคณิตเชิงเส้นจะกล่าวถึงสเกลาร์ (scalar) อยู่ตลอดเวลา คำว่าสเกลาร์ในพีชคณิตเชิงเส้นหมายถึงสมาชิกของเซต โดยที่เซตดังกล่าวไม่เป็นเซตว่างและมีการดำเนินการสองชนิด (ปกติจะแทนด้วยการบวกและกานคูณ) สอดคล้องกับสมบัติทางพีชคณิตบางประการ ซึ่งเป็นสมบัติของฟิลด์

นิยาม 2

กำหนดเซต $F \neq \phi$ และมีการดำเนินการสองชนิดบนเซต F คือการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เซต F จะเรียกว่าฟิลด์ ก็ต่อเมื่อมีสมบัติดังนี้

1. $\forall k,m \in F, k+m \in F$
2. $\forall k,m \in F, k+m = m+k$
3. $\forall k,m,n \in F, (k+m)+n = k+(m+n)$
4. มีสมาชิกตัวหนึ่งใน F เขียนแทนด้วย 0 ซึ่งทำให้ $k+0=0+k=k$
5. สำหรับแต่ละ $k \in F$ จะมีสมาชิก $-k$ ซึ่งทำให้ $k+(-k)=(-k)+k=0$
6. $\forall k,m \in F, km \in F$
7. $\forall k,m \in F, km = mk$
8. $\forall k,m,n \in F, (km)n = k(mn)$
9. มีสมาชิกตัวหนึ่งใน F ซึ่งไม่เท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย 1 ซึ่งทำให้ $k1 = 1k = k$
10. สำหรับแต่ละ $k \in F, k \neq 0$ จะมี $k^{-1} \in F$ ซึ่งทำให้ $kk^{-1} = k^{-1}k = 1$
11. $\forall k,m,n \in F, k(m+n) = km+kn$

ข้อตกลงเบื้องต้น

(1) จะเรียกสมาชิกของฟิลด์ว่า **สเกลาร์ (scalar)** เช่น ในฟิลด์ $(\mathbb{Q},+,\times)$ สเกลาร์หมายถึงจำนวนตรรกยะ ส่วนในฟิลด์ $(\mathbb{C},+,\times)$ สเกลาร์หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน

(2) หากไม่กำหนดเป็นอย่างอื่นหรือไม่ได้ระบุ ฟิลด์ที่กล่าวถึงจะเป็นฟิลด์ของจำนวนจริง $(\mathbb{R},+,\times)$ ดังนั้นในกรณีทั่วไป สเกลาร์หมายถึงจำนวนจริงนั่นเอง

ตัวอย่างของฟิลด์ เช่น

- เซตของจำนวนตรรกยะพร้อมด้วยการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เขียนแทนด้วย $(\mathbb{Q},+,\times)$ เป็นฟิลด์
- เซตของจำนวนจริงพร้อมด้วยการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เขียนแทนด้วย $(\mathbb{R},+,\times)$ เป็นฟิลด์
- เซตของจำนวนเชิงซ้อนพร้อมด้วยการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เขียนแทนด้วย $(\mathbb{C},+,\times)$ เป็นฟิลด์

ส่วนเซตของจำนวนเต็มพร้อมด้วยการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เขียนแทนด้วย $(\mathbb{Z},+,\times)$ **ไม่เป็นฟิลด์** เพราะไม่มีสมบัติข้อ 10.

นิยาม 3

เซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่มีขนาด $m \times n$ โดยที่สมาชิกทุกตัวของทุกเมทริกซ์มาจากฟิลด์ F เขียนแทนด้วย $M_{m\times n}(F)$

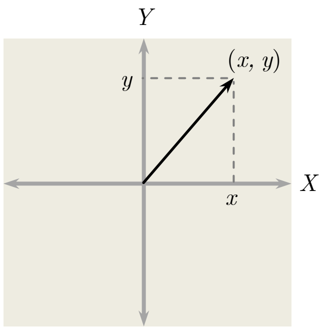
จากนิยาม $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ จะหมายถึงเซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่มีขนาด $m \times n$ โดยที่สมาชิกทุกตัวของทุกเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง และ $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ จะหมายถึงเซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่มีขนาด $m \times n$ โดยที่สมาชิกทุกตัวของทุกเมทริกซ์เป็นจำนวนตรรกยะ

สำหรับ $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ คือเซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่มีขนาด $m\times 1$ โดยที่สมาชิกทุกตัวของทุกเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง นั่นคือ $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ คือเซตของเวกเตอร์หลัก (column vector) ทั้งหมดที่จำนวน m แถว นั่นเอง สัญลักษณ์อื่นๆ นอกจากนี้ เช่น เราทราบว่า

$$M_{2\times 1}(\mathbb{R}) = \{A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } x, y \in \mathbb{R}\}$$

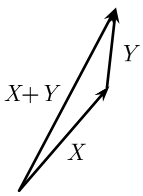
เราจะใช้สัญลักษณ์แทนเซตนี้ด้วย $\mathbb{R}^2$

C. ปริภูมิ $\mathbb{R}^n$

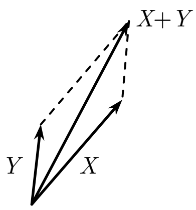


เวกเตอร์หลักขนาด 2×1 สามารถแทนด้วย $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ หรืออาจแทนด้วยจุด (x,y) ในระนาบสองมิติ XY ตามแนวคิดในการใช้คู่อันดับ ซึ่งจะหมายถึงเวกเตอร์นั้นมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0,0)$ และจุดปลายอยู่ที่ (x,y) เราจะแทนเซตของเวกเตอร์หลักขนาด 2×1 ทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^2$ ซึ่งหมายถึงจุดทั้งหมดในปริภูมิสองมิติ

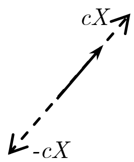
ข้อสังเกต
เราเขียนแทนเวกเตอร์เอ ด้วยสัญลักษณ์ A หรืออาจใช้สัญลักษณ์ $\bar{a}, \mathbf{a}$ เพื่อแบ่งแยกความแตกต่างระหว่างเวกเตอร์และสเกลาร์ (จะแทนสเกลาร์เอด้วย a)



กฎสามเหลี่ยม (Triangle Law)



กฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram Low)



การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ในเชิงเราขาคณิตเราสามารถบวกเวกเตอร์สองเวกเตอร์ และคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้ดั้งนี้

- การบวกเวกเตอร์โดยอาศัยกฎสามเหลี่ยม (Triangle Law) กล่าวว่า ถ้า X และ Y เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่จุดเริ่มต้นของ Y อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ X ผลบวกของ X และ Y เขียนแทนด้วย $X+Y$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของ X และจุดสิ้นสุดที่จุดสิ้นสุดของ Y

- บวกเวกเตอร์กฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram Low) ที่ว่า ถ้า X และ Y เป็นเวกเตอร์ที่จุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกัน แล้ว $X+Y$ คือเวกเตอร์ที่แทนด้วยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี X และ Y เป็นด้านประกอบ และมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์จะกล่าวว่า

- การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ กล่าวว่า สำหรับสเกลาร์ $c>0$ และ X เป็นเวกเตอร์ แล้วเวกเตอร์ cX จะเป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ X แต่ขนาดของเวกเตอร์จะหดหรือขยายด้วยผลจากสเกลาร์ c

สำหรับ **การบวก (addition) และการคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)** ใน $\mathbb{R}^2$ เรากำหนดเช่นเดียวกับในเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น

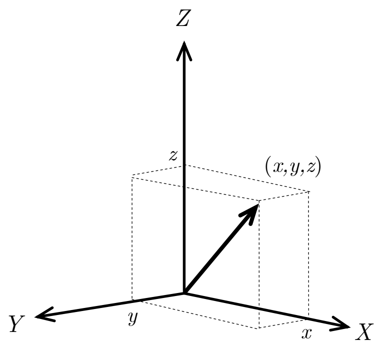
ตัวอย่างที่ 1. กำหนด $X=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ และ $Y=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

(1) จงหา $X+Y$

$$X+Y=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2\\2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

(2) จงหา $2X$

$$2X=\begin{bmatrix}(2)(-1)\\(2)(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$$



จุดในปริภูมิสามมิติ

ในทำนองเดียวกัน เราจะแทนเซตของเวกเตอร์หลักขนาด 3×1 ทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^3$ เมื่อเรากล่าวถึงเวกเตอร์ในเชิงของจุดในปริภูมิสามมิติ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

จะหมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(0,0,0)$ และจุดปลายอยู่ที่ (x,y,z) ในปริภูมิสามมิติ ส่วนการบวกเวกเตอร์ (vector addition) และการคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication) ใน $\mathbb{R}^3$ จะกำหนดเช่นเดียวกับในเมทริกซ์

สำหรับปริภูมิที่มีมิติมากกว่า 3 นั้น เราสามารถขยายความรู้จากปริภูมิสองมิติและปริภูมิสามมิติออกไป แต่คงไม่ง่ายที่เราจะอธิบายจุดเหล่านั้นในเชิงเราขาคณิต

นิยาม 4
$\mathbb{R}^n$ คือเซตของเมทริกซ์ขนาด $n\times 1$ ทั้งหมด

D. ผลรวมเชิงเส้นและอิสระเชิงเส้น

จากเมทริกซ์ P และ Q แทนข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2554 และ 2553 ตามลำดับ

$$P=\begin{bmatrix}12&40&52\\0&1&1\\1&5&6\\13&46&59\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}17&32&49\\0&1&1\\2&0&2\\19&33&52\end{bmatrix}$$

P ประกอบด้วยเวกเตอร์หลัก (column vector) จำนวน 3 เวกเตอร์ ได้แก่

$$C_1=\begin{bmatrix}12\\0\\1\\13\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}40\\1\\5\\46\end{bmatrix} \text{ และ } C_3=\begin{bmatrix}52\\1\\6\\59\end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า C_3 เป็นผลรวมของ C_1 และ C_2

$$\begin{bmatrix}12\\0\\1\\13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}40\\1\\5\\46\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52\\1\\6\\59\end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad C_1+C_2=C_3$$

ลักษณะเช่นนี้ จะเรียกว่า C_3 **จะขึ้นอยู่กับ** C_1 และ C_2 นอกจากนี้ยังพบว่าถ้าให้ A แทน แทนข้อมูลศึกษาต่อเฉลี่ยของทั้งสองปี จะพบว่า A **จะขึ้นอยู่กับ** P และ Q ดังนี้

$$A=\frac{1}{2}(P+Q)=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q$$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเรียกว่า C_3 เป็นผลรวมเชิงเส้นของ C_1 และ C_2 ในทำนองเดียวกัน เรียก A ว่าเป็นผลรวมเชิงเส้นของ P และ Q เนื่องจากทั้ง C_3 และ A ขึ้นอยู่กับเมทริกซ์อื่นที่เกี่ยวข้องกับ**การบวกเมทริกซ์และการคูณด้วยสเกลาร์** เราจะนิยามในกรณีทั่วๆ ไป ดังนี้

นิยาม 5
ให้ $S=\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_k\}\subset M_{m\times n}$ และ $C\in M_{m\times n}$ จะกล่าวว่า C ไม่อิสระเชิงเส้น (linearly dependent) บน S ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ b_i ที่ทำให้

$$C=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+\ldots+b_kA_k$$

และจะเรียกว่า C เป็นการรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ A_i

จากนิยามที่ 5 จะเห็นชัดว่า เราสามารถเขียนเวกเตอร์ศูนย์เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใดๆ เรียกว่าเวกเตอร์ศูนย์ขึ้นอยู่กับทุกเวกเตอร์

$$\mathbf{0}=0A_1+0A_2+0A_3+\ldots+0A_k$$

จากข้อมูลศึกษาต่อปีการศึกษา 2554 ให้ $S_1=\{C_1,C_2,C_3\}$ เราสามารถเขียนผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S_1 ได้ 2 แบบ ดังนี้

$$C_1+C_2-C_3=\mathbf{0} \quad \text{และ} \quad 0C_1+0C_2+0C_3=\mathbf{0}$$

เราสามารถพูดได้ว่า S_1 เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แต่ถ้าให้ $S_2=\{C_1,C_2\}$ เราสามารถเขียนผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S_2 ได้เพียงแบบเดียว คือ

$$0C_1+0C_2=\mathbf{0}$$

เราจะพูดว่า S_2 เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เรานิยามในกรณีทั่วไปได้ดังนี้

นิยาม 6
ให้ $S=\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_k\}\subset M_{m\times n}$ จะกล่าวว่า S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกใน S อย่างน้อยหนึ่งสมาชิก A_j ที่เป็นการรวมเชิงเส้นของสมาชิกอื่นใน S

เราพบว่าเซต $\{\mathbf{0}\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น และจะกล่าวว่า S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นเมื่อ S ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 2. จะเห็นได้ชัดว่า A_1 ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ A_i ใดๆ เนื่องจากสมาชิกแถวที่สองหลักที่หนึ่งของ A_1 เท่ากับ 0 แต่เมทริกซ์อื่นไม่เป็น 0 ดังนั้นเซตไม่อิสระเชิงเส้นไม่จำเป็นที่ทุกสมาชิกต้องเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของสมาชิกอื่น

ตัวอย่างที่ 2. กำหนด $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ แล้ว S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่

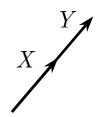
แนวตอบ จากการสังเกตพบว่า $A_2 = 2A_3 + A_4 = 0A_1 + 2A_3 + A_4$

ดังนั้น S เป็น**ไม่**เซตอิสระเชิงเส้น

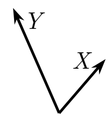
เราจะศึกษาความหมายของเซตอิสระเชิงเส้นในเชิงเราขาคณิต เมื่อเมทริกซ์ที่สนใจเป็นเวกเตอร์

ตัวอย่างที่ 3. ให้ $S = \{X, Y\} \subset \mathbb{R}^2$ แล้ว S เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ เมื่อกำหนด

(3.1)



(3.2)



แนวตอบ (3.1) S ไม่เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เนื่องจากมีสเกลาร์ c ทำให้ $X = cY$

(3.2) S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น เนื่องจาก S ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

เห็นได้ชัดว่าอิสระเชิงเส้นเกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการสองชนิดคือ **การบวก (addition)** และ**การคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)** ในกรณีทั่วไป เซตของเมทริกซ์ทั้งหมดที่ขึ้นอยู่กับเซตเมทริกซ์ที่กำหนดให้ เรียกว่าสแปน (span) ของเซต

นิยาม 7

ให้ $S = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k\} \subset M_{m\times n}$ จะเรียก W ว่าสแปน (span) ของเซต S เมื่อ

$$W = \{B \mid B = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 + \ldots + c_kA_k\}$$

แทนด้วย $W = span(S)$

จากตัวอย่าง (3.1) สแปน ของเซต S เป็นเส้นตรงและ (3.2) สแปน ของเซต S เป็นระนาบ

E. ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

พิจารณาการแก้สมการเมทริกซ์ $A = \frac{1}{2}(P+Q)$ เพื่อหา Q ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(P+Q) \\ 2A &= P+Q \\ 2A - P &= Q \end{aligned}$$

จากการแก้สมการเมทริกซ์ข้างต้น เราใช้สมบัติทางพีชคณิตหลายอย่างเพียงแต่เราไม่ได้เขียนอธิบายในรายละเอียด ซึ่งที่ถูกต้องแล้วเราควรแสดงดังนี้

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(P+Q) \\
2A &= 2\left(\frac{1}{2}(P+Q)\right) = \frac{2}{2}(P+Q) = P+Q = Q+P \\
2A+(-P) &= Q+P+(-P) \\
&= Q+(P-P) = Q+\mathbf{0} = Q
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่าเมทริกซ์มีสมบัติทางพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับการบวกเมทริกซ์และการคูณด้วยสเกลาร์ เราจะรวบรวมสมบัติที่สำคัญ 10 ข้อ ซึ่งเป็นสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์ และเพื่อให้ง่ายต่อการเขียน (และเพื่อวัตถุประสงค์บางประการ) เราให้ $\mathcal{V} = M_{m\times n}$ สำหรับค่าเฉพาะ m,n บางค่า เช่น $\mathcal{V}$ อาจเป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×3 หรือ 2×1

ทฤษฎีบท 1

ให้ X,Y และ Z เป็นสมาชิกของ $\mathcal{V}$ และ k,m เป็นสเกลาร์

(1) $X+Y$ เป็นสมาชิกใน $\mathcal{V}$ สำหรับทุก $X,Y \in \mathcal{V}$

(2) $X+Y = Y+X$ สำหรับทุก $X,Y \in \mathcal{V}$

(3) $X+(Y+Z) = (Y+X)+Z$ สำหรับทุก $X,Y,Z \in \mathcal{V}$

(4) มี $\mathbf{0}$ ใน $\mathcal{V}$ ซึ่งทำให้ $\mathbf{0}+X = X+\mathbf{0} = X$ สำหรับทุก $X \in \mathcal{V}$

(5) สำหรับแต่ละ X ใน $\mathcal{V}$ จะมี $-X$ ใน $\mathcal{V}$ ซึ่งทำให้ $X+(-X) = -X+X = \mathbf{0}$

(6) kX เป็นเวกเตอร์ใน $\mathcal{V}$ สำหรับทุก $X \in \mathcal{V}$

(7) $k(X+Y) = kX+kY$

(8) $(k+m)X = kX+mX$

(9) $(km)X = k(mX)$

(10) $1X = X$

เราจะศึกษาสมบัติเหล่านี้ และจะฝึกพิสูจน์ว่าเป็นจริงสำหรับ $\mathcal{V} = M_{2\times 3}$ และ $\mathcal{V} = M_{2\times 1}$ และเมทริกซ์ขนาดอื่นๆ ต่อไปเราจะศึกษาสมบัติเหล่านี้เมื่อสมาชิกของ $\mathcal{V}$ ไม่ใช่เมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น เมื่อสมาชิกของ $\mathcal{V}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ทฤษฎีบทนี้ยังเป็นจริงเมื่อกำหนดการบวก (addition) และการคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication) ดังนี้

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(cf)(x) = cf(x)$$

นิยาม 8

จะเรียก $\mathcal{V}$ ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์ ก็ต่อเมื่อมีการดำเนินการสองชนิดบน $\mathcal{V}$ สอดคล้องกับสมบัติของปริภูมิเวกเตอร์ 10 ข้อ ตามทฤษฎีบท 1 โดยที่การดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การบวก เป็นการนำสมาชิกใน $\mathcal{V}$ มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การคูณด้วยสเกลาร์ เป็นการนำสมาชิกใน $\mathcal{V}$ และสเกลาร์มาคูณกัน

และจะเรียกสมาชิกใน $\mathcal{V}$ ว่าเวกเตอร์

เราจะศึกษาพีชคณิตเชิงเส้นผ่านการพิสูจน์ นักเรียนจะได้เรียนรู้เทคนิคการพิสูจน์ หัวใจของการเรียนที่สำคัญที่สุดคือ**การเข้าใจบทพิสูจน์** ในการเขียนบทพิสูจน์ นักเรียนควรระลึกไว้เสมอว่า “การพิสูจน์คือการสื่อสาร (proofs are communication)” จะสื่อสารอย่างไรให้ผู้รับสารเข้าใจ