ทบทวนก่อนสอบ ชุดที่ 2

ชื่อ-สกุล เฉลย ชั้น เลขที่

กำหนดนิยามเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

นิยาม 1 Trace

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ แล้ว Trace ของ A เขียนแทนด้วย $Tr(A)$ คือผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A นั่นคือ $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$

นิยาม 2 เมทริกซ์มูลฐาน

เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n\times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n

นิยาม 3 เมทริกซ์ทแยงมุม

เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i\neq j$

นิยาม 4 เมทริกซ์สามเหลี่ยม

กำหนดเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

1. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i>j$ หรือ $\forall i<j$
2. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i>j$
3. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i<j$

นิยาม 5 เมทริกซ์สมมาตร)symmetric matrix)

เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร** เมื่อ $A^T=A$

นิยาม 6 ดีเทอร์มินันต์

กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det$ นิยามว่า

$$\det(A)=\sum(\pm)\ a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}$$

เมื่อ $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1,2,\ldots,n\}$ และมีวิธีการเลือกเครื่องหมาย $\pm$ ดังนี้

เลือก $+$ เมื่อ $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่

เลือก $-$ เมื่อ $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่

เรียก $\det(A)$ ว่าดีเทอร์มินันต์ของ A

1. กำหนด E_1, E_2, E_3, E_4 เป็นเมทริกซ์มูลฐาน และกำหนดเมทริกซ์ A ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิจาณาการหา A^{-1} ดังต่อไปนี้

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\middle| I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| E_2 E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\middle| E_3 E_2 E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle| E_4 E_3 E_2 E_1 I\right]$$

1.1 จงหา E_1, E_2, E_3, E_4 และ A^{-1} โดยสามารถเติมเฉพาะคำตอบ (2.5 คะแนน)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ไม่มีคำตอบอื่นนอกเหนือจากนี้

1.2 จงเขียน A ให้อยู่ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานโดยแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ (2.5 คะแนน)

จาก 1.1 จะได้

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

และจาก $A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1 I$

ดังนั้น $A = (E_4 E_3 E_2 E_1 I)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ไม่มีคำตอบอื่นนอกเหนือจากนี้

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบเพื่อหา $Tr(AB)$ (5 คะแนน)

(**หมายเหตุ** นิยามของ Trace กำหนดไว้ในหน้าที่ 2)

แนวตอบ

ให้ $AB = C = \left[c_{ij}\right]_{5\times 5}$

ดังนั้น $Tr(AB) = Tr(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} + c_{55}$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k1} = (2)(4) + (3)(-2) + (-1)(3) + (0)(-1) + (4)(0) = -1$$

ในทำนองเดียวกัน $c_{22} = 0, c_{33} = -7, c_{44} = 14, c_{55} = -4$

จะได้ $Tr(AB) = -1 + 0 - 7 + 14 + 12 = 18$

1 คะแนน สำหรับแนวคิดในการหา $Tr(AB)$

3 คะแนน สำหรับการคำนวณ $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}$ แต่ละค่าให้ 0.6 คะแนน

1 คะแนน สำหรับคำตอบของ $Tr(AB)$

3. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x + \quad 2z = 1 \\ 2x + y \quad = a \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

จงใช้เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเพื่อหาค่าคงที่ a และ b ที่ทำให้ระบบสมการ (แสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ)

3.1 มีผลเฉลยเดียว

3.2 ไม่มีผลเฉลย

3.3 มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ พร้อมทั้งหาผลเฉลยทั่วไป

(5 คะแนน)

แนวตอบ

1.5 คะแนน สำหรับการลดรูปจนสามารถ ***อ่านค่าคำตอบได้*** อาจเป็น row echelon form หรือ reduced row echelon form หรือแบบอื่นที่สามารถอ่านค่าคำตอบได้ และแปรความหมายได้ถูกต้อง

จากระบบสมการที่กำหนดให้ สร้างเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & b & 0 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & b & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & a-2 \\ 0 & 1 & b-6 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & a-2 \\ 0 & 0 & b-2 & -a-1 \end{array}\right]$$

จากเมทริกซ์ที่ได้ ระบบสมการจะมีผลเฉลยเดียวเมื่อ $b \neq 2$ และ a เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ตอบ (3.1) ระบบสมการจะมีผลเฉลยเดียวเมื่อ $b \neq 2$ และ a เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1 คะแนน สำหรับเงื่อนไข ไม่จำเป็นต้องหาผลเฉลย

กรณี $b = 2$ ระบบสมการจะมีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์หรือไม่มีผลเฉลยขึ้นอยู่กับค่า a

ตอบ (3.2) ระบบสมการจะไม่มีผลเฉลยเมื่อ $b = 2$ และ $a \neq -1$

1 คะแนน สำหรับการหาเงื่อนไขของ a และ b เมื่อระบบสมการจะไม่มีผลเฉลย

กรณี $b = 2$ และ $a = -1$ ระบบสมการจะมีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์

พิจารณาต่อ ให้ $b = 2$ และ $a = -1$ จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & a-2 \\ 0 & 0 & b-2 & -a-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1.5 คะแนน สำหรับการหาเงื่อนไข และผลเฉลยทั่วไปได้

แทนค่าย้อนกลับจะได้ $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - 4z = -3 \end{cases}$

ให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นพารามิเตอร์ จะได้ $x = 1 - 2t, y = 4t - 3$

ตอบ (3.3) ระบบสมการจะมีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์เมื่อ $b = 2$ และ $a = -1$

คำตอบทั่วไปคือ $(1-2t, 4t-3, t)$ เมื่อ t เป็นสเกลาร์ใดๆ

กำหนดให้ A,B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n\times n$

L เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างมิติ $n\times n$

U เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนมิติ $n\times n$

D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $n\times n$

4. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

4.1 ถ้า $A^{-1}=A^T$ และ $B^{-1}=B^T$ แล้ว $(AB)^T(AB)=I$ (1 คะแนน)

พิสูจน์ ให้ $A^{-1}=A^T$ และ $B^{-1}=B^T$

จะได้ $A^TA=I=AA^T$ และ $B^TB=I=BB^T$

ดังนั้น $(AB)^T(AB)=(B^TA^T)(AB)$

$$\begin{aligned}&=B^T(A^TA)B\\&=B^T(I)B\\&=B^TB\\&=I\end{aligned}$$

4.2 ถ้า $A=LDL^T$ และ $B=UDU^T$ แล้ว A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร (1 คะแนน)

พิสูจน์ ให้ $A=LDL^T$ และ $B=UDU^T$

พิจารณา $A^T=(LDL^T)^T=(L^T)^TD^TL^T=LDL^T=A$

และ $B^T=(UDU^T)^T=(U^T)^TD^TU^T=UDU^T=B$

ดังนั้น A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

4.3 ให้ $m,k\in\mathbb{R}$ ถ้า $A=LDL^T$ และ $B=UDU^T$ แล้ว $(kA+mB)^{100}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร (3 คะแนน)

พิสูจน์ ให้ $A=LDL^T$ และ $B=UDU^T$

$$\begin{aligned}((kA+mB)^{100})^T&=(\underbrace{(kA+mB)(kA+mB)\ldots(kA+mB)}_{\text{100 times}})^T\\&=\underbrace{(kA+mB)^T(kA+mB)^T\ldots(kA+mB)^T}_{\text{100 times}}\\&=\underbrace{(kA^T+mB^T)(kA^T+mB^T)\ldots(kA^T+mB^T)}_{\text{100 times}}\end{aligned}$$

และผลจาก 4.2 จะได้ว่า A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ $A^T=A$ และ $B^T=B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}((kA+mB)^{100})^T&=\underbrace{(kA+mB)(kA+mB)\ldots(kA+mB)}_{\text{100 times}}\\&=(kA+mB)^{100}\end{aligned}$$

ดังนั้น $(kA+mB)^{100}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

5. จงพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

5.1 สมบัติไม่แปรเปลี่ยน (invariant property) ของฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์

“สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A, B ใดๆ ถ้า B มีตัวผกผัน แล้ว A และ $B^{-1}AB$ จะมีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากัน”

(1 คะแนน)

พิสูจน์ ให้ B มีตัวผกผัน

พิจารณา
$$\begin{aligned}\det(B^{-1}AB) &= \det(B^{-1})\det(A)\det(B)\\ &= \frac{1}{\det(B)}\det(A)\det(B)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

ดังนั้น A และ $B^{-1}AB$ จะมีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากัน

5.2 Sylvester's Determinant Theorem

“สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ใดๆ ที่มีตัวผกผัน $\det(X + AB) = \det(X)\det(I_n + BX^{-1}A)$”

(4 คะแนน)

พิสูจน์ ให้ X, A, B มีตัวผกผัน

และใช้ผลจาก 5.1 ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์มีสมบัติไม่แปรเปลี่ยน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(X + AB) &= \det(B(X + AB)B^{-1})\\ &= \det(BXB^{-1} + BABB^{-1})\\ &= \det(BXB^{-1} + BAI_n)\\ &= \det(BXB^{-1} + BI_nA)\\ &= \det(BXB^{-1} + BXX^{-1}A)\\ &= \det(BXB^{-1} + BXI_nX^{-1}A)\\ &= \det(BXB^{-1} + BXB^{-1}BX^{-1}A)\\ &= \det\big((BXB^{-1})(I_n + BX^{-1}A)\big)\\ &= \det(BXB^{-1})\det(I_n + BX^{-1}A)\\ &= \det(X)\det(I_n + BX^{-1}A)\end{aligned}$$

6. จงเติมเฉพาะคำตอบที่ถูกต้องในช่อง $\boxed{}$

6.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{5\times5}$ สูตรต่อไปนี้เป็น**ส่วนหนึ่ง**ของสูตรในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A จงเติมเครื่องหมาย $+$ หรือ $-$ ลงในช่องว่าง (1 คะแนน)

$$\det(A) = \boxed{+}\, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55} \boxed{-}\, a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54} \boxed{-}\, a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53}$$

$$\boxed{-}\, a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53} \boxed{+}\, a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52} \boxed{+}\, a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51} + \dots$$

6.2 กำหนดให้ $a,b,\dots,i$ เป็นจำนวนจริงและ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$ จงหาค่าของ

6.2.1 $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a-5g & b-5h & c-5i \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = \boxed{-100}$ (1 คะแนน)

6.2.2 ถ้า $\begin{vmatrix} 2kc & 2a & 2b+2c \\ 2kf & 2d & 2e+2f \\ 2ki & 2g & 2h+2i \end{vmatrix} = 240$ แล้ว $k = \boxed{3}$ (1 คะแนน)

6.3 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & 8 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 7 \\ -6 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = \boxed{-1}$ (0.5 คะแนน)

$\det(A_2) = \boxed{0}$ (0.5 คะแนน)

$\det(A_3) = \boxed{-400}$ (1 คะแนน)

7. จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{4\times4}$ โดยที่ $M_{ij}(A)$ และ $C_{ij}(A)$ แทนไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij} ตามลำดับ ถ้า $C_{23}(A^T) = -4$ แล้ว $M_{32}(2A)$ เท่ากับเท่าใด (2 คะแนน)

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 4$$

ดังนั้น $M_{32}(2A) = 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = (8)(4) = 32$

7.2 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีตัวผกผัน ให้ A มีมิติ 2×2 ถ้า $adj(A) = B - B^T$ และ $\det(A) = 2$ โดยที่ $C = \det(A)\cdot B^{-1} + B^T AB^{-1}$ จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาค่า $\det(2C^T)^{-1}$ (ตอบเป็นผลสำเร็จ) (3 คะแนน)

วิธีทำ ให้ $adj(A) = B - B^T$ และ $\det(A) = 2$ และ $C = \det(A)\cdot B^{-1} + B^T AB^{-1}$

พิจารณา $adj(A) = B - B^T$ ดังนั้น $B^T = B - adj(A)$

จาก

$$\begin{aligned} C &= \det(A)\cdot B^{-1} + B^T AB^{-1} \\ &= \det(A)\cdot B^{-1} + [B - adj(A)]AB^{-1} \\ &= \det(A)\cdot B^{-1} + [B - \det(A)A^{-1}]AB^{-1} \\ &= \det(A)\cdot B^{-1} + BAB^{-1} - \det(A)A^{-1}AB^{-1} \\ &= \det(A)\cdot B^{-1} + BAB^{-1} - \det(A)B^{-1} \\ &= BAB^{-1} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์มีสมบัติไม่แปรเปลี่ยน (หรือแสดงได้ว่า)

$$\det(C) = \det(A) = 2$$

จะได้ $\det(2C^T)^{-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{1}{\det(C)} = \dfrac{1}{8}$