ทบทวนก่อนสอบ ชุดที่ 2

ชื่อ-สกุล ชั้น เลขที่

กำหนดนิยามเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

นิยาม 1 Trace

ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ แล้ว Trace ของ A เขียนแทนด้วย $Tr(A)$ คือผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A นั่นคือ $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn}$

นิยาม 2 เมทริกซ์มูลฐาน

เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n\times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n

นิยาม 3 เมทริกซ์ทแยงมุม

เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i\neq j$

นิยาม 4 เมทริกซ์สามเหลี่ยม

กำหนดเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

1. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i>j$ หรือ $\forall i<j$
2. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i>j$
3. เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i<j$

นิยาม 5 เมทริกซ์สมมาตร)symmetric matrix)

เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร** เมื่อ $A^T=A$

นิยาม 6 ดีเทอร์มินันต์

กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$

ฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\det$ นิยามว่า

$$\det(A)=\sum(\pm)\ a_{1p_1}a_{2p_2}...a_{np_n}$$

เมื่อ $(p_1,p_2,...,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1,2,...,n\}$ และมีวิธีการเลือกเครื่องหมาย $\pm$ ดังนี้

เลือก $+$ เมื่อ $(p_1,p_2,...,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคู่

เลือก $-$ เมื่อ $(p_1,p_2,...,p_n)$ เป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยนคี่

เรียก $\det(A)$ ว่าดีเทอร์มินันต์ของ A

1. กำหนด E_1, E_2, E_3, E_4 เป็นเมทริกซ์มูลฐาน และกำหนดเมทริกซ์ A ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิจารณาการหา A^{-1} ดังต่อไปนี้

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\middle| I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| E_2 E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\middle| E_3 E_2 E_1 I\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle| E_4 E_3 E_2 E_1 I\right]$$

1.1 จงหา E_1, E_2, E_3, E_4 และ A^{-1} โดยสามารถเติมเฉพาะคำตอบ (2.5 คะแนน)

$$E_1 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1.2 จงเขียน A ให้อยู่ในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐานโดยแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ (2.5 คะแนน)

2. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงวิธีคิดประกอบคำตอบเพื่อหา $Tr(AB)$ (5 คะแนน)

(**หมายเหตุ** นิยามของ Trace กำหนดไว้ในหน้าที่ 2)

วิธีทำ

3. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น (แสดงวิธีคิดประกอบคำตอบ 5 คะแนน)

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + y = a \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

จงใช้เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเพื่อหาค่าคงที่ a และ b ที่ทำให้ระบบสมการ

3.1 มีผลเฉลยเดียว

3.2 ไม่มีผลเฉลย

3.3 มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ พร้อมทั้งหาผลเฉลยทั่วไป

วิธีทำ

กำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$

L เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างมิติ $n \times n$

U เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนมิติ $n \times n$

D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมมิติ $n \times n$

4. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

4.1 ถ้า $A^{-1} = A^T$ และ $B^{-1} = B^T$ แล้ว $(AB)^T(AB) = I$ (1 คะแนน)

พิสูจน์

4.2 ถ้า $A = LDL^T$ และ $B = UDU^T$ แล้ว A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตร (1 คะแนน)

พิสูจน์

4.3 ให้ $m, k \in \mathbb{R}$ ถ้า $A = LDL^T$ และ $B = UDU^T$ แล้ว $(kA + mB)^{100}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร (3 คะแนน)

พิสูจน์

5. จงพิสูจน์สมบัติต่อไปนี้

5.1 สมบัติไม่แปรเปลี่ยน (invariant property) ของฟังก์ชันดีเทอร์มินันต์

"สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A, B ใดๆ ถ้า B มีตัวผกผัน แล้ว A และ $B^{-1}AB$ จะมีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากัน"

พิสูจน์ (1 คะแนน)

5.2 Sylvester's Determinant Theorem

"สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ใดๆ ที่มีตัวผกผัน $\det(X + AB) = \det(X)\det(I_n + BX^{-1}A)$"

พิสูจน์ (4 คะแนน)

6. จงเติมเฉพาะคำตอบที่ถูกต้องในช่อง $\boxed{}$

6.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{5\times 5}$ สูตรต่อไปนี้เป็น**ส่วนหนึ่ง**ของสูตรในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A

จงเติมเครื่องหมาย $+$ หรือ $-$ ลงในช่องว่าง (1 คะแนน)

$$\det(A) = \boxed{+}\ a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}\ \boxed{}\ a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54}\ \boxed{}\ a_{15}a_{21}a_{32}a_{44}a_{53}$$

$$\boxed{}\ a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}\ \boxed{}\ a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}\ \boxed{}\ a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51} + \dots$$

6.2 กำหนดให้ $a,b,\dots,i$ เป็นจำนวนจริงและ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$ จงหาค่าของ

6.2.1 $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ a-5g & b-5h & c-5i \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = \boxed{}$ (1 คะแนน)

6.2.2 ถ้า $\begin{vmatrix} 2kc & 2a & 2b+2c \\ 2kf & 2d & 2e+2f \\ 2ki & 2g & 2h+2i \end{vmatrix} = 240$ แล้ว $k = \boxed{}$ (1 คะแนน)

6.3 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & 8 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 7 \\ -6 & 9 & -12 & 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = \boxed{}$ (0.5 คะแนน)

$\det(A_2) = \boxed{}$ (0.5 คะแนน)

$\det(A_3) = \boxed{}$ (1 คะแนน)

7. จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาคำตอบต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{4\times 4}$ โดยที่ $M_{ij}(A)$ และ $C_{ij}(A)$ แทนไมเนอร์ (Minor) และโคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij} ตามลำดับ ถ้า $C_{23}(A^T) = -4$ แล้ว $M_{32}(2A)$ เท่ากับเท่าใด (2 คะแนน)

วิธีทำ

7.2 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ที่มีตัวผกผัน

ให้ A มีมิติ 2×2 ถ้า $adj(A) = B - B^T$ และ $\det(A) = 2$ โดยที่ $C = \det(A)\cdot B^{-1} + B^T A B^{-1}$

จงแสดงวิธีคิดเพื่อหาค่า $\det(2C^T)^{-1}$ (ตอบเป็นผลสำเร็จ) (3 คะแนน)

วิธีทำ