แบบฝึกหัดทบทวน ชุดที่ 3

นิยามเบื้องต้น

ปริภูมิเวกเตอร์

กำหนดให้ $V \neq \varnothing$ และ F เป็นฟิลด์

กำหนดการดำเนินการสองชนิดคือ

ชนิดที่ 1: การดำเนินการบน V เรียกว่า**การบวก** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V มาบวกกัน

ชนิดที่ 2: การดำเนินการบน V และ F เรียกว่า**การคูณด้วยสเกลาร์** เป็นการนำเวกเตอร์ใน V และสเกลาร์ใน F มาคูณกัน

จะเรียก V ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บน F ก็ต่อเมื่อการดำเนินการทั้งสองสอดคล้องกับสัจพจน์ 10 ข้อต่อไปนี้

1. $\bar{u} + \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v} \in V$
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ สำหรับทุก $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$
4. มี $\bar{0}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ สำหรับทุก $\bar{u} \in V$
5. สำหรับแต่ละ $\bar{u}$ ใน V จะมี $-\bar{u}$ ใน V ซึ่งทำให้ $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
6. $k\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน V สำหรับทุก $k \in F, \bar{u} \in V$
7. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
8. $(k + m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$
9. $(km)\bar{u} = k(m\bar{u}) = m(k\bar{u})$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

คำถาม

1. กำหนดให้ $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ และ $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ถ้า T_1 เป็นการแปลงแบบการหมุนด้วยมุมขนาด 45° ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $T_2(1,0) = (-2,5)$ และ $T_2(0,1) = (-1,3)$ จงหา

   1.1 เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T_1 และ T_2 (1 คะแนน)

   1.2 จงแสดงว่า $T_1 \circ T_2$ เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (2 คะแนน)

   1.3 จงหา $(T_1 \circ T_2)^{-1}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2 คะแนน)

2. กำหนดให้ $V = \mathbb{R}^2$ และถ้า $(a,b), (c,d) \in V, k$ เป็นสเกลาร์ใดๆ จะนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ ดังนี้ $(a,b) + (c,d) = (a + c - 1, b + d - 1)$ และ $k(a,b) = (a, kb)$

   2.1 จงแสดงว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวมีเอกลักษณ์การบวก (1.5 คะแนน)

   2.2 ถ้า $\bar{u} = (a,b) \in V$ จงหาตัวผกผันการบวกของ $\bar{u}$ (1.5 คะแนน)

   2.3 จงตรวจสอบว่า V พร้อมด้วยการดำเนินการดังกล่าวเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็น จงบอกเหตุผล (2 คะแนน)

3. จงตรวจสอบว่าเซต S ที่กำหนดให้เป็นปริภูมิย่อยหรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน

3.1 $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a-d=b-c \right\}$ (2.5 คะแนน)

3.2 $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq b\}$ (2.5 คะแนน)

4. กำหนด $\overline{v}_1 = (1,0,-2,5), \overline{v}_2 = (0,1,1,1), \overline{v}_3 = (0,-1,1,-1), \overline{v}_4 = (1,1,-2,6)$

4.1 จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ อยู่ใน $span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ (3 คะแนน)

4.2 จงเขียนเวกเตอร์ $\overline{u} = (1,0,-1,5)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ (1 คะแนน)

4.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 & \overline{v}_4 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $rank(A)$ (1 คะแนน)

5. กำหนดระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ดังนี้ (5 คะแนน)

$$\begin{cases} 3w - 3y + 9z = 0 \\ -w + x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4w + x - 6y + 13z = 0 \end{cases}$$

จงหาฐานหลัก (Basis) และมิติ (Dimension) ของปริภูมิคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่กำหนดให้

6. จงแสดงว่า $S = \{1+2x-x^2, 2-x+2x^2, -1+8x-3x^2\}$ เป็นฐานหลัก (Basis) ของปริภูมิ P_2 (5 คะแนน)

7. ร้านสุกี้แห่งหนึ่งมีสูตรผสมน้ำจิ้ม 3 สูตรคือ สูตรธรรมดา สูตรโบราณ สูตรโมเดิร์น โดยแต่ละสูตรจะใช้ส่วนผสมหลักสี่ชนิด ได้แก่เกลือ กระเทียม พริก และน้ำตาล ในการทำน้ำจิ้มจะใช้ส่วนผสมแต่ละอย่างดังตาราง (หน่วยเป็นกิโลกรัมต่อน้ำจิ้มหนึ่งหน่วย)

ส่วนผสม	**สูตรธรรมดา**	**สูตรโบราณ**	**สูตรโมเดิร์น**
เกลือ	1	2	1
กระเทียม	2	5	5
พริก	2	5	6
น้ำตาล	3	7	7

ถ้ามีส่วนผสมแต่ละชนิดจำกัด คือมีเกลือ 16 กิโลกรัม กระเทียม 45 กิโลกรัม พริก 48 กิโลกรัมและน้ำตาล 64 กิโลกรัม จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะใช้ส่วนผสมหมดทุกชนิดพอดีในการทำน้ำจิ้มทั้ง 3 สูตร ถ้าเป็นไปได้จะได้น้ำจิ้มชนิดละกี่หน่วย (5 คะแนน)

หมายเหตุ แนวตอบดูได้จาก www.mwit.ac.th/~sion/