ข้อสอบเก็บคะแนน ค30205 พีชคณิตเชิงเส้น 1

ภาคเรียนที่ 1/2555 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

ชื่อ ชั้น เลขที่

ตอนที่ 1 จริงหรือเท็จ (ตอบถูกไม่มีคะแนน ตอบผิดหักข้อละ 1 คะแนนจากคะแนนเต็ม 10 คะแนน)

การแปลงเชิงเส้น

___✗___1. การแปลง T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่งก็ต่อเมื่อ $T(\bar{0}) = \bar{0}$

___✓___2. ถ้า $T_1 : R^2 \to R^2$ เป็นการสะท้อนด้วยแกน x และ $T_2 : R^2 \to R^2$ เป็นการสะท้อนด้วยแกน y แล้ว $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$

ปริภูมิเวกเตอร์ของระบบจำนวนจริง (real vector spaces)

___✓___3. ทุกปริภูมิเวกเตอร์จะมีเวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) เป็นสมาชิก

___✗___4. มีปริภูมิเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวนอกเหนือจากปริภูมิเวกเตอร์ศูนย์

___✗___5. กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ให้ $\bar{x} \in V$ และ a, b เป็นสเกลาร์ใดๆ ถ้า $a\bar{x} = b\bar{x}$ แล้ว $a = b$

___✗___6. กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ให้ $\bar{x}, \bar{y} \in V$ และ a เป็นสเกลาร์ใดๆ ถ้า $a\bar{x} = a\bar{y}$ แล้ว $\bar{x} = \bar{y}$

ปริภูมิย่อย (subspaces)

___✗___7. กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ถ้า $W \subset V$ แล้ว W จะเป็นปริภูมิย่อยของ V

___✗___8. เซตว่างเป็นปริภูมิย่อยของทุกปริภูมิเวกเตอร์

___✗___9. ถ้า W คือระนาบ xy ใน R^3 นั่นคือ $W = \{(a,b,0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ แล้ว $W = R^2$

ผลรวมเชิงเส้น (linear combination) และแผ่ทั่ว (span)

___✓___10. ให้ $S \neq \varnothing$ มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ แล้วเวกเตอร์ศูนย์เขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S ได้

___✓___11. $R^3 = span\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

___✓___12. $\{\bar{0}\} = span(\varnothing)$

___✓___13. กำหนด V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $S \subset V$ ให้ W_S เป็นปริภูมิย่อยของ V โดยที่ $S \subset W_S$ แล้วผลตัด (intersection) ของทุกปริภูมิย่อย W_S คือ $span(S)$

อิสระเชิงเส้น

___✗___14. ถ้า S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แล้วแต่ละเวกเตอร์ใน S จะสามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่นใน S ได้

___✓___15. เซตที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ศูนย์ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

นิยาม กำหนดให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ การแปลง $T:V\to W$ จะเป็นการแปลงเชิงเส้น (linear combination) จาก V ไป W เมื่อสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ ถ้า $\bar{x},\bar{y}\in V$ และ c เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว 1. $T(\bar{x}+\bar{y})=T(\bar{x})+T(\bar{y})$ 2. $T(c\bar{x})=cT(\bar{x})$

ตอนที่ 2 **แสดงวิธีคิด** (10 คะแนน)

1. จงตรวจสอบว่าการแปลงต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลง
   a. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ กำหนดโดย $T((a,b))=(a+b,a-b,2b)$
   b. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((a,b))=(a,1)$

(a.) จะตรวจสอบว่า $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ กำหนดโดย $T((a,b))=(a+b,a-b,2b)$ เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

ให้ $\bar{x}=(x_1,x_2),\bar{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ และ $c\in\mathbb{R}$

พิจารณา (1)
$$\begin{aligned}T(\bar{x}+\bar{y}) &= T(x_1+y_1,x_2+y_2)\\ &= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2),(x_1+y_1)-(x_2+y_2),2(x_2+y_2))\\ &= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2),(x_1-x_2)+(y_1-y_2),2x_2+2y_2)\\ &= (x_1+x_2,x_1-x_2,2x_2)+(y_1+y_2,y_1-y_2,2y_2)\\ &= T(\bar{x})+T(\bar{y})\end{aligned}$$

พิจารณา (2)
$$\begin{aligned}T(c\bar{x}) &= T(cx_1,cx_2)\\ &= (cx_1+cx_2,cx_1-cx_2,2cx_2)\\ &= c(x_1+x_2,x_1-x_2,2x_2)\\ &= cT(\bar{x})\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $T((a,b))=(a+b,a-b,2b)$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

พิจารณา $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ และ $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ ดังนั้น $\left[T\right]=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\0&2\end{bmatrix}$

(b.) จะตรวจสอบว่า $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((a,b))=(a,1)$ เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

ให้ $\bar{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ และ $c\in\mathbb{R}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}T(c\bar{x}) &= T(cx_1,cx_2)\\ &= (cx_1,1)\\ &\neq (cx_{1,}c)=cT(\bar{x})\end{aligned}$$

จะได้ว่า $T((a,b))=(a,1)$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

2. จงตรวจสอบว่าเซต V ที่กำหนดให้ พร้อมด้วยการดำเนินการที่นิยามในแต่ละข้อเป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน

   a. $V = \mathbb{R}^2$ และนิยามการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ดังนี้

      ถ้า $\bar{u} = (u_1, u_2)$, $\bar{v} = (v_1, v_2)$ และ k เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วจะนิยาม

      (i.) $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

      (ii.) $k\bar{u} = (u_1, ku_2)$

   b. $V = \{A \mid A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ และ $\det(A) \neq 0\}$ พร้อมด้วยการดำเนินการมาตรฐาน

(a.) V และการดำเนินการที่กำหนดไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

เนื่องจากไม่สอดคล้องกับสัจพจน์ข้อที่ 8 นั่นคือ $(k+m)\bar{u} \neq k\bar{u} + m\bar{u}$

จะแสดงตัวอย่างค้านโดย เลือก $k = 1, m = 1, \bar{u} = (1,1)$

พิจารณา $(k+m)\bar{u} = 2(1,1) = (1,2)$

$k\bar{u} + m\bar{u} = (1,1) + (1,1) = (2,2)$

เห็นได้ชัดว่า $(1,2) \neq (2,2)$

(b.) V และการดำเนินการที่กำหนดไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

เนื่องจากไม่สอดคล้องกับสัจพจน์ข้อที่ 1 นั่นคือ มี $\bar{u}, \bar{v} \in V$ ทำให้ $\bar{u} + \bar{v} \notin V$

จะแสดงตัวอย่างค้านโดย เลือก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $\det(A) = \det(B) = 1 \neq 0$ ดังนั้น $A, B \in V$

แต่ $A + B = \bar{0} \notin V$ เนื่องจาก $\det(\bar{0}) = 0$

3. จงตรวจสอบว่าเซต S ที่กำหนดให้เป็นปริภูมิย่อยหรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ ถ้าไม่เป็นจงยกตัวอย่างค้าน

a. $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b,c$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

b. $S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3 \mid a_0 = a_1 + a_2 + a_3\}$

(a.) $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b,c$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$ ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

จะแสดงตัวอย่างค้านโดย เลือก $(1,0,0) \in S, \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ ทำให้ $\frac{1}{2}(1,0,0) = (\frac{1}{2},0,0) \notin S$

ดังนั้น S ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ เนื่องจากไม่มีสมบัติปิดของการคูณด้วยสเกลาร์

(b.) $S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3 \mid a_0 = a_1 + a_2 + a_3\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

ให้ $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in S$ และ $k \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $a_0 = a_1 + a_2 + a_3$ และ $b_0 = b_1 + b_2 + b_3$

พิจารณา (1) สมบัติปิดการบวก

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_0 = a_1 + a_2 + a_3$ และ $b_0 = b_1 + b_2 + b_3$

ดังนั้น $(a_0 + b_0) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$

นั่นคือ $a(x) + b(x) \in S$

พิจารณา (2) สมบัติปิดของการคูณด้วยสเกลาร์

$$ka(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + ka_3x^3$$

เนื่องจาก $a_0 = a_1 + a_2 + a_3$

ดังนั้น $ka_0 = ka_1 + ka_2 + ka_3$

นั่นคือ $ka(x) \in S$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

4. กำหนด $\overline{v}_1 = (1,1,1,2), \overline{v}_2 = (2,1,0,3), \overline{v}_3 = (1,1,0,2), \overline{v}_4 = (3,1,1,4)$ และ $\overline{u} = (1,1,1,1)$
ถ้า $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ จงแสดงวิธีการตรวจสอบว่า $\overline{u}$ อยู่ใน $span(S)$ หรือไม่

พิจารณา ถ้า $\overline{u}$ อยู่ใน $span(S)$ จะมี $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $a\overline{v}_1 + b\overline{v}_2 + c\overline{v}_3 + d\overline{v}_4 = \overline{u}$
จากสมการ จะได้เมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่าไม่มีค่า a, b, c, d ที่ทำให้สมการเป็นจริง
นั่นคือ $\overline{u}$ ไม่อยู่ใน $span(S)$

5. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

จงหาค่าหรือเงื่อนไขของจำนวนจริง k ที่ทำให้ปริภูมิคำตอบของระบบสมการเป็น

a. เฉพาะจุดกำเนิด

b. เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

c. ระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด

d. $\mathbb{R}^3$

จากระบบสมการ พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติม

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{bmatrix}$$

ค่าวิกฤติได้แก่ $k = -2, 1$

เงื่อนไขของจำนวนจริง k ที่ทำให้ปริภูมิคำตอบของระบบสมการเป็น

a. เฉพาะจุดกำเนิด

ระบบสมการต้องมีคำตอบเดียว นั้นคือ $k \neq -2, 1$

b. เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

ลดรูปเมทริกซ์แล้วเกิดแถวที่เป็นศูนย์ 1 แถว นั้นคือ $k = -2$

c. ระนาบที่ผ่านจุดกำเนิด

ลดรูปเมทริกซ์แล้วเกิดแถวที่เป็นศูนย์ 2 แถว นั้นคือ $k = 1$

d. $\mathbb{R}^3$

ลดรูปเมทริกซ์แล้วเกิดแถวที่เป็นศูนย์ 3 แถว นั้นคือ ไม่มีค่า k ที่ทำให้ปริภูมิคำตอบเป็น $\mathbb{R}^3$

6. กำหนดให้ $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ เมื่อ $\overline{v}_1 = 3x + x^2 - x^3, \overline{v}_2 = 6 + 5x^2 + x^3, \overline{v}_3 = 4 - 7x + x^2 + 3x^3$ จงแสดงว่า S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น และเขียนแต่ละเวกเตอร์เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เหลือ

ทำให้พิจารณาผลรวมเชิงเส้น $a\overline{v}_1 + b\overline{v}_2 + c\overline{v}_3 = \overline{0}$ เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

จากสมการ จะได้เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือมี $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ทำให้ $a\overline{v}_1 + b\overline{v}_2 + c\overline{v}_3 = \overline{0}$ หลายชุดคำตอบ

คำตอบหนึ่งคือ $-7\overline{v}_1 + 2\overline{v}_2 - 3\overline{v}_3 = \overline{0}$

ดังนั้น S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

และสามารถเขียนแต่ละเวกเตอร์เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เหลือ คือ

$$\overline{v}_1 = \frac{2}{7}\overline{v}_2 - \frac{3}{7}\overline{v}_3$$

$$\overline{v}_2 = \frac{7}{2}\overline{v}_1 + \frac{3}{2}\overline{v}_3$$

$$\overline{v}_3 = -\frac{7}{3}\overline{v}_1 + \frac{2}{3}\overline{v}_2$$