3. ปริภูมิเวกเตอร์แบบยุคลิด

Euclidean Vector Spaces

เนื้อหา

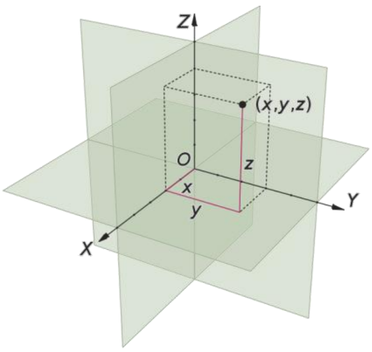
1. ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ
2. ผลคูณภายใน นอร์มและระยะทาง
3. เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก
4. เรขาคณิตของระบบสมการเชิงเส้น

ปริภูมิ (space) คือส่วนที่ไร้ขอบเขต เป็นปริมาณที่มีมิติในวัตถุและเหตุการณ์และมีตำแหน่งสัมพัทธ์และทิศทาง สำหรับนักคณิตศาสตร์หมายถึงโลกส่วนตัวที่สร้างขึ้น โดยสมาชิกที่อาศัยอยู่ในโลกนี้จะต้องมีคุณสมบัติตามกฎที่นักคณิตศาสตร์กำหนดขึ้นอย่างเคร่งครัด

เราคุ้นเคยกับปริภูมิสองมิติ และปริภูสามมิติ ตามแนวคิดในการใช้คู่อันดับ (a_1, a_2) แทนจุดในสองมิติหรือเวกเตอร์ในสองมิติ และใช้สามสิ่งอันดับ (a_1, a_2, a_3) แทนจุดในสามมิติหรือเวกเตอร์ในสามมิติ เราศึกษาสมบัติของการดำเนินการบนเวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติและปริภูสามมิติ ในบทนี้เราจะขยายความรู้ไปสู่ปริภูมิ n มิติ เป้าหมายสำคัญคือการขยายความรู้และศึกษาสมบัติของการดำเนินการบนเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

3.1 ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ

พีชคณิตเชิงเส้นมักจะเริ่มจากการศึกษาเวกเตอร์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 และ 3 มิติ ซึ่งเวกเตอร์ในที่นี้ คือส่วนของเส้นที่มีทิศทางกำกับ โดยปกติแล้วจะถูกเขียนในรูปแบบของขนาด และทิศทาง เวกเตอร์เหล่านี้สามารถบวกเข้าด้วยกันได้ และสามารถคูณด้วยสเกลาร์ได้ พีชคณิตสมัยใหม่ ได้รับการขยายแนวความคิดเพื่อพิจารณาระบบปริภูมิใดๆ หรือ infinite dimension ปริภูมิเวกเตอร์ของปริภูมิขนาด n ถูกเรียกว่า n-space ซึ่งคุณสมบัติโดยส่วนใหญ่ของ 2 หรือ 3-space สามารถขยายไปสู่มิติที่สูงขึ้นได้



ภาพ 1 พิกัดของจุดใดๆ ในปริภูมิ 3 มิติ

เวกเตอร์ใน n-มิติ (Vectors in *n*-Space)

ก่อนอื่นเราขอนิยามเวกเตอร์ในปริภูมิ R^n ดังนี้

> **บทนิยาม**
> กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก คำว่า n สิ่งอันดับ (ordered n-tuple) หมายถึงลำดับของจำนวนจริง n จำนวน ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
> เซตของ n สิ่งอันดับทั้งหมด เรียกว่า ปริภูมิ n มิติ (n-space) และเขียนแทนด้วยสัญญาลักษณ์ R^n

Note:

- ในกรณีที่มี 1 มิติ ($n = 1$) เราใช้ตัวเลขแทนจุดและเส้นตรงคือปริภูมิ 1 มิติ
- ในกรณี $n = 2$ หรือ $n = 3$ เราจะเรียกปริภูมิสองมิติ และปริภูสามมิติตามลำดับ
- จะเรียกสมาชิก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ของปริภูมิเวกเตอร์ n มิติว่าเป็นจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ n มิติ

การดำเนินการ

บทนิยาม
กำหนด $\overline{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ และ $\overline{v}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n เราจะนิยามการดำเนินการบนเวกเตอร์ดังนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์

$\overline{u}=\overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$

การบวกเวกเตอร์

$\overline{u}+\overline{v}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า k เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $k\overline{u}=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)$

การดำเนินการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เราเรียกว่า **การดำเนินการมาตรฐาน (Standard operations)** บน R^n

เวกเตอร์ศูนย์บน R^n แทนด้วย $\overline{0}$ หมายถึงเวกเตอร์ $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$

ถ้า $\overline{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n นิเสธของเวกเตอร์ u (Negative of Vector u) เขียนแทนด้วย $-\overline{u}$ โดยที่ $-\overline{u}=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$

ในทางเรขาคณิต เราไม่สามารถแสดงให้เห็นตำแหน่งของจุดในปริภูมิที่มีมิติมากกว่า 3 ได้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถที่จะสร้างและกำหนดสมบัติสำหรับปริภูมิมิติ n ใดๆ ได้

สมบัติของการดำเนินการสำหรับเวกเตอร์ในปริภูมิมิติ n

Properties of vector Operations in *n*-Space

ทฤษฎีบท 3.1.1
ถ้า $\overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\overline{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ และ $\overline{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ $k.m$ เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\overline{u}+\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n
2. $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
3. $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$
4. มี $\overline{0}$ ใน R^n ซึ่งทำให้ $\overline{0}+\overline{u}=\overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$
5. สำหรับ $\overline{u}$ จะมี $-\overline{u}$ ใน R^n ทำให้ $\overline{u}+(-\overline{u})=(-\overline{u})+\overline{u}=\overline{0}$
6. $k\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n
7. $(km)\overline{u}=k(m\overline{u})=m(k\overline{u})$
8. $k(\overline{u}+\overline{v})=k\overline{u}+k\overline{v}$
9. $(k+m)\overline{u}=k\overline{u}+m\overline{u}$
10. $1\overline{u}=\overline{u}$

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

แนวคิดเกี่ยวกับขนาดของเส้น ความยาว มุม สามารถเข้าใจได้ง่ายในกรณีที่เป็นมิติเดียว หรือ 2-3 มิติ ถ้ามิติมากกว่า 3 มิติ เป็นการยากที่จะวาดให้เห็นได้ ในกรณีของเวกเตอร์สถานะที่มีส่วนประกอบของแรงดัน อุณหภูมิ และระยะขจัด เป็นการยากที่จะกล่าวถึงคุณลักษณะของเวกเตอร์แทนสถานะดังกล่าว ดังนั้นจึงต้องหาคำจำกัดความและคุณสมบัติของเวกเตอร์และเวกเตอร์สเปส

ทฤษฎีบท 3.1.2

ถ้า $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ $k.$ เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $0\overline{v} = \overline{0}$
2. $k\overline{0} = \overline{0}$
3. $-1\overline{v} = -\overline{v}$

พิสูจน์

ผลรวมเชิงเส้น (Linear Combinations)

นิยาม

ให้ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n แล้วเรากล่าวว่า $\overline{w}$ เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ ใน R^n ถ้าสามารถเขียน

$$\overline{w} = k_1\overline{v}_1 + k_2\overline{v}_2 + \ldots + k_n\overline{v}_n$$

เมื่อ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นสเกลาร์

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า มีสเกลาร์ c_1, c_2, c_3 ที่ทำให้

$$c_1(1,-1,0) + c_2(3,2,1) + c_3(0,1,4) = (-1,1,19)$$

แบบฝึกทักษะ 3.1

1. กำหนด $\overline{u}=(1,3,3)$, $\overline{v}=(-1,0,3)$ และ $\overline{w}=(1,-2,3)$ จงหา

a. $2\overline{u}+\overline{v}$

b. $\overline{u}+\overline{w}-\overline{v}$

c. $2\overline{v}-3\overline{w}$

2. จากข้อ 1 จงหาเวกเตอร์ $\overline{x}$ ที่ทำให้ $2\overline{u}-\overline{v}+\overline{x}=7\overline{x}+\overline{w}$

3. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนจริง a,b,c ที่ทำให้ $a(-2,9,6)+b(-3,2,1)+c(1,7,5)=(0,5,4)$

4. จงหาจำนวนจริง a,b,c ทั้งหมด ที่ทำให้ $a(1,2,0)+b(2,1,1)+c(0,3,1)=(0,0,0)$

3.2 ผลคูณภายใน นอร์มและระยะทาง

การคูณของเวกเตอร์ที่จะศึกษาในหัวข้อนี้คือการคูณภายในแบบยุคลิด ซึ่งจะนิยามดังนี้

บทนิยาม
ถ้า $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n แล้ว ผลคูณภายใน (Euclidean inner product) ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

การคูณกันของเวกเตอร์มีด้วยกัน 3 ชนิด คือ

1. การคูณภายใน (Inner Product)
2. การคูณภายนอก (Outer Product)
3. การคูณคอร์ส (Cross Product)

การคูณคอร์สกำหนดในระบบ 3 มิติเท่านั้น ผลการคูณคอร์สของสองเวกเตอร์จะได้เวกเตอร์ใหม่ที่ตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ทั้งสอง โดยทิศของเวกเตอร์ผลลัพธ์หาได้จากการใช้กฎมือขวา โดยขนาดของเวกเตอร์มีขนาดเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ทั้งสองเป็นด้านประกอบ (หาความรู้เพิ่มเติม)

การคูณภายนอก (Outer Product) อาจเรียกว่า ผลคูณแดด (Dyad Product) นักเรียนสามารถหาความรู้เพิ่มเติมเองได้

จะเห็นได้ว่าเมื่อ $n = 2$ หรือ $n = 3$ ผลคูณภายใน (Euclidean inner product) ก็คือผลคูณจุด (dot product)

หมายเหตุ เราจะเขียน $\bar{u}^2$ แทน $\bar{u} \cdot \bar{u}$

สมบัติของผลคูณภายใน (Properties of Euclidean inner product)

โดยปกติผลคูณภายในสามารถเขียนได้ในรูปการคูณของเมทริกซ์ได้ว่า
$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v}^T \bar{u}$

ทฤษฎีบท 3.2.1
ถ้า $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ และ $\bar{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k, m เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
2. $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
3. $k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (k\bar{v})$
4. $(k\bar{u}) \cdot (m\bar{v}) = km(\bar{u} \cdot \bar{v})$
5. $\bar{u} \cdot \bar{u} \geq 0$ และ $\bar{u} \cdot \bar{u} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{0}$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ และ $\bar{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k, m เป็นสเกลาร์

1. จะแสดง $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

2. จะแสดง $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$

3. จะแสดง $k(\bar{u}\cdot\bar{v}) = (k\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(k\bar{v})$

4. จะแสดง $(k\bar{u})\cdot(m\bar{v}) = km(\bar{u}\cdot\bar{v})$

5. จะแสดง $\bar{u}\cdot\bar{u} \geq 0$ และ $\bar{u}\cdot\bar{u} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{0}$

นอร์มและระยะทาง

เราจะขยายความรู้เกี่ยวกับความยาวของเวกเตอร์ ระยะทางระหว่างเวกเตอร์ นอร์ของเวกเตอร์ มุมระหว่างเวกเตอร์ไปสู่ปริภูมิมิติ n ใดๆ

ระยะทางแบบยุคลิด คือระยะทางปกติระหว่างจุดสองจุดในแนวเส้นตรง ซึ่งอาจสามารถวัดได้ด้วยไม้บรรทัด มีที่มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส เหตุที่เรียกว่า แบบยุคลิด เนื่องจากเป็นการวัดระยะทางในปริภูมิแบบยุคลิด (หรือแม้แต่ปริภูมิผลคูณภายใน) คือไม่มีความโค้งและไม่สามารถทำให้โค้งงอ และการใช้สูตรนี้วัดระยะทางทำให้กลายเป็นปริภูมิอิงระยะทาง ค่าประจำ (norm) ที่เกี่ยวข้องก็จะเรียกว่าเป็น ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) เช่นกัน

บทนิยาม
กำหนด $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n
นอร์มของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $\left\|\bar{u}\right\|$ นิยามโดย

$$\left\|\bar{u}\right\| = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

บทนิยาม
กำหนด $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ระยะทางแบบยุคลิด (Euclidean distance) หรือระยะทางระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v})$ นิยามโดย

$$\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) = \left\|\bar{u} - \bar{v}\right\|$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\bar{u} = (2,3,-1,7), \bar{v} = (1,0,3,-5)$
จงหา $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v})$

ก่อนจะศึกษาสมบัติของนอร์มและระยะทาง ขอแนะนำอสมการ Cauchy-Schwarz ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.2 อสมการ Cauchy-Schwarz
ถ้า $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n
แล้ว $\left|\bar{u} \cdot \bar{v}\right| \le \left\|\bar{u}\right\| \left\|\bar{v}\right\|$

พิสูจน์

สมบัติพื้นฐานของนอร์ม

ทฤษฎีบท 3.2.3
ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\left\|\bar{u}\right\| \ge 0$
2. $\left\|\bar{u}\right\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{0}$
3. $\left\|k\bar{u}\right\| = \left|k\right| \left\|\bar{u}\right\|$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์

1. จะแสดง $\left\|\bar{u}\right\| \ge 0$

2. จะแสดง $\left\|\bar{u}\right\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{0}$

3. จะแสดง $\left\|k\bar{u}\right\| = \left|k\right|\left\|\bar{u}\right\|$

ทฤษฎีบท 3.2.4 อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม
ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว

$$\left\|\bar{u} + \bar{v}\right\| \le \left\|\bar{u}\right\| + \left\|\bar{v}\right\|$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.5 Parallelogram Equation for Vectors
ถ้า $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n แล้ว

$$\left\|\overline{u}+\overline{v}\right\|^2+\left\|\overline{u}-\overline{v}\right\|^2=2\left(\left\|\overline{u}\right\|^2+\left\|\overline{v}\right\|^2\right)$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.6
ถ้า $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n แล้ว

$$\overline{u}\cdot\overline{v}=\frac{1}{4}\left\|\overline{u}+\overline{v}\right\|^2-\frac{1}{4}\left\|\overline{u}-\overline{v}\right\|^2$$

พิสูจน์

สมบัติของระยะทางแบบยุคลิด

ทฤษฎีบท 3.2.7
ถ้า $\overline{u}$, $\overline{v}$ และ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว

1. $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})\geq 0$
2. $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})=0$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{u}=\overline{v}$
3. $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{v})=\mathrm{d}(\overline{v},\overline{u})$
4. $\mathrm{d}(\overline{u},\overline{w})\leq \mathrm{d}(\overline{u},\overline{w})+\mathrm{d}(\overline{w},\overline{v})$

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกทักษะ 3.2

1. จงหานอร์มของเวกเตอร์

a. $\bar{u} = (-4,3)$

b. $\bar{v} = (2,2,2\sqrt{2})$

c. $\bar{w} = (5,6,0)$

2. เรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

a. ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

b. ถ้า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\bar{u}$

3. จงหาระยะทางแบบยุคลิดระหว่าง $\bar{u} = (1,-1,-4,2,3)$ และ $\bar{v} = (2,3,4,5,6)$

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว

a. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) \geq 0$

b. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} = \bar{v}$

c. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{v}) = \mathrm{d}(\bar{v},\bar{u})$

d. $\mathrm{d}(\bar{u},\bar{w}) \leq \mathrm{d}(\bar{u},\bar{w}) + \mathrm{d}(\bar{w},\bar{v})$

3.3 เวกเตอร์เชิงตั้งฉาก

มุมระหว่างเวกเตอร์สามารถใช้หลักการของผลคูณด็อท (Dot product) ของ 2-3 มิติ คือ

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta$$

ดังนั้น มุมโคซายน์ระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ใน R^n คือ

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|}$$

นิยาม

เวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะเรียกว่าเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $\bar{u} = (-2,3,-1,4), \bar{v} = (1,2,0,-1)$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

ทฤษฎีบท 3.3.1 Theorem of Pythagoras in R^n

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันใน R^n แล้ว

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$$

พิสูจน์

3.4 เรขาคณิตของระบบสมการเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสมการเส้นตรง และสมการระนาบในปริภูมิ n มิติ เส้นตรงและระนาบใน R^2 และ R^3 สามารถแสดงให้เห็นจริงทางเรขาคณิตได้

นิยาม เส้นตรงในปริภูมิ n มิติ
ถ้าเวกเตอร์ $\overline{r}_0$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n โดยที่ $\overline{v} \neq \overline{0}$
และ t เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วสมการ

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v}$$

เป็นสมการเส้นตรงผ่านจุดสิ้นสุดของ $\overline{r}_0$ และขนานกับ $\overline{v}$ (t เป็นสเกลาร์)

นิยาม ระนาบในปริภูมิ n มิติ
ถ้าเวกเตอร์ $\overline{r}_0, \overline{v}_1$ และ $\overline{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n โดยที่ $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \neq \overline{0}$ และไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ t_1, t_2 เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วสมการ

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + t_1\overline{v}_1 + t_2\overline{v}_2$$

เป็นสมการระนาบผ่านจุดสิ้นสุดของ $\overline{r}_0$ และขนานกับ $\overline{v}_1, \overline{v}_2$

สมการข้างต้นเป็นสมการของเส้นตรงและระนาบ**ในรูปเวกเตอร์** ซึ่งสามารถเขียนในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equation) และสมการสมมาตร (symmetric equation) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(-1,2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\overline{v} = (-2,3)$

วิธีทำ

ให้ $\overline{r} = (x,y) \in R^2$

จากสมการเส้นตรง $\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v}$

จะได้สมการในรูปเวกเตอร์ $(x,y) = (-1,2) + t(-2,3)$

สมการอิงตัวแปรเสริม $x = -1 - 2t, y = 2 + 3t$

สมการสมมาตร $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{3}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,-3)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\overline{v} = (4,-5,1)$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} 4x + y - 11z = 39 \\ 3x + y - 7z = 26 \\ 2x - 8z = 26 \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงว่าเส้นตรงในตัวอย่างที่ 5 เป็นคำตอบของระบบสมการในตัวอย่างที่ 6 (เมื่อจัดรูปแล้วเป็นเส้นตรงเดียวกัน)

ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P_1(1,2,-1), P_2(2,3,1)$ และ $P_3(3,-1,2)$ โดยใช้สมการเวกเตอร์

ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ

ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ สามารถสร้างได้จากเวกเตอร์แนวระนาบ (normal vector) ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบนั้น การหาเวกเตอร์แนวระนาบจะใช้ความรู้เกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product or vector product)

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product or Vector product)
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ และ $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$
เขียนแทนด้วย $\overline{a} \times \overline{b}$ หมายถึงเวกเตอร์ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

หมายเหตุ อาจเขียนโดยอาศัยรูปของดีเทอมินันต์ดังนี้

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบท 3.4.1
ให้ $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{a} \times \bar{b}$ ตั้งฉากกับ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\bar{a} = (-1,0,3)$ และ $\bar{b} = (1,3,4)$

การหาสมการระนาบ

กำหนดให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆ ในระนาบ และ $P_0(x_0, y_0, x_0)$ เป็นจุดบนระนาบ ให้ $\bar{n} = (a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) ดังนั้น $\bar{n}$ จะตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์บนระนาบ นั่นคือ

$$\bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

จะได้สมการระนาบดังนี้

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ตัวอย่างที่ 11 สมการระนาบที่ผ่านจุด $P_1(1,2,-1), P_2(2,3,1)$ และ $P_3(3,-1,2)$ โดยใช้เวกเตอร์แนวฉาก

เราสามารถหาสมการเส้นตรงในปริภูมิ 2 มิติ เช่นเดียวกับการหาสมการระนาบ โดยอาศัยเวกเตอร์แนวฉาก ผลสรุปเป็นไปตามทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.3 สมการทั่วไปของเส้นตรงในปริภูมิ 2 มิติ
ถ้า a,b,c เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แล้วสมการ

$$ax+by+c=0$$

มีกราฟเป็นเส้นตรงในปริภูมิ 2 มิติ ซึ่งมี $\overline{n}=(a,b)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

พิสูจน์ เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.4.4 สมการทั่วไปของระนาบในปริภูมิ 3 มิติ
ถ้า a,b,c,d เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน แล้วสมการ

$$ax+by+cz+d=0$$

มีกราฟเป็นระนาบในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งมี $\overline{n}=(a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดสมการระนาบ

$$(x,y,z)=(5,0,0)+t_1(1,1,0)+t_2(-2,0,1)$$

จงหาสมการทั่วไปของระนาบและเวกเตอร์ในแนวฉาก

ระยะห่างระหว่างจุดและระนาบ

ทฤษฎีบท 3.4.5 ระยะห่างระหว่างจุดและระนาบ
ระยะห่างระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, x_0)$ และระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ แทนด้วย D โดยที่

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 16 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $(1, -4, -3)$ และระนาบ $2x - 3y + 6z = -1$

แบบฝึกทักษะ 3.4

1. จงหาสมการเวกเตอร์และสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง ที่ผ่านจุดและขนานเวกเตอร์ที่กำหนดให้

a. จุด $(-4,1)$ และเวกเตอร์ $\bar{v}=(0,-8)$

b. จุด $(-9,3,4)$ และเวกเตอร์ $\bar{v}=(-1,6,0)$

2. จงหาสมการเวกเตอร์และสมการอิงตัวแปรเสริมของระนาบ ที่ผ่านจุดกำเนิดและตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{v}=(4,0,-5)$

3. จงหาคำตอบทั่วไปของระบบสมการทั้งสองในรูปของสมการเวกเตอร์ และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 6x+4y-2z=0 \\ -3x-2y+z=0 \end{cases} \quad \text{และ} \quad \begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 6x+4y-2z=4 \\ -3x-2y+z=-2 \end{cases}$$