1. เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

System of Linear Equations and Matrices

▶What you should learn

- จะใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (elementary row operation) กับเมทริกซ์ได้อย่างไร
- จะใช้เมทริกซ์และการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างไร
- จะใช้เมทริกซ์และการกำจัดเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination)เพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างไร

▶Why you should learn it

เราสามารถใช้เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไปได้ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาหลากหลายชนิด ทั้งในด้านวิทยาศาสตร์และแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

1.1 ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

การศึกษาเรื่องระบบสมการเชิงเส้น และการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นถือว่าเป็นเรื่องพื้นฐานที่สำคัญ ในหัวข้อนี้จะแนะนำให้นักเรียนได้รู้จักระบบสมการเชิงเส้น พร้อมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

ฟีลด์ (Fields)

ในระบบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน เรากล่าวถึงสมบัติทางพีชคณิตบางประการเกี่ยวกับการบวกและการคูณ ซึ่งเป็นสมบัติของฟีลด์

นิยาม

กำหนดเซต $F \neq \phi$ และมีการดำเนินการสองชนิดบนเซต F คือการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ เซต F จะเรียกว่าฟีลด์ ก็ต่อเมื่อมีสมบัติดังนี้

1. $\forall k, m \in F, k + m \in F$
2. $\forall k, m \in F, k + m = m + k$
3. $\forall k, m, n \in F, (k + m) + n = k + (m + n)$
4. มีสมาชิกตัวหนึ่งใน F เขียนแทนด้วย 0 ซึ่งทำให้ $k + 0 = 0 + k = k$
5. สำหรับแต่ละ $k \in F$ จะมีสมาชิก $-k$ ซึ่งทำให้ $k + (-k) = (-k) + k = 0$
6. $\forall k, m \in F, km \in F$
7. $\forall k, m \in F, km = mk$
8. $\forall k, m, n \in F, (km)n = k(mn)$
9. มีสมาชิกตัวหนึ่งใน F ซึ่งไม่เท่ากับ 0 เขียนแทนด้วย 1 ซึ่งทำให้ $k1 = 1k = k$
10. สำหรับแต่ละ $k \in F, k \neq 0$ จะมีสมาชิก $k^{-1} \in F$ ซึ่งทำให้ $kk^{-1} = k^{-1}k = 1$
11. $\forall k, m, n \in F, k(m + n) = km + kn$

ตัวอย่างที่ 1 เซตของจำนวนเต็ม พร้อมด้วยการดำเนินการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณ **ไม่เป็นฟิลด์** เพราะไม่มีสมบัติข้อ 10.

ตัวอย่างที่ 2 เซตของจำนวนตรรกยะ พร้อมด้วยการดำเนินการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณเป็นฟิลด์

ตัวอย่างที่ 3 เซตของจำนวนจริง พร้อมด้วยการดำเนินการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณเป็นฟิลด์

ตัวอย่างที่ 4 เซตของจำนวนเชิงซ้อน พร้อมด้วยการดำเนินการดำเนินการบวกและการดำเนินการคูณเป็นฟิลด์

Note:

1. หากไม่กำหนดอย่างอื่น ฟิลด์ที่กล่าวถึงเป็นฟิลด์ของจำนวนจริง
2. จะเรียกสมาชิกของฟิลด์ว่า สเกลาร์ (Scalar)

สมการเชิงเส้น

นิยาม
กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ สมการที่อยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร และ $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ เป็นสเกลาร์ใน F
เรียกว่า **สมการเชิงเส้น**

คำตอบของสมการเชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ หมายถึงลำดับของสเกลาร์ ซึ่งเมื่อแทนในสมการแล้ว จะได้สมการที่เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 5 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการเชิงเส้น

$$2x + 3y = -3$$
$$4x - 3y = 2z + 5$$
$$ix + (3 + 2i)y = 0$$

ตัวอย่างที่ 6 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการ **ไม่** เชิงเส้น

$$x^2 - 5y = 3$$
$$x + \sin(y) = 0$$
$$e^x + y = 1$$

จะพบว่า**คำตอบทั่วไป**ของของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรหนึ่งสมการ จะติดค่าพารามิเตอร์หนึ่งตัว ส่วนคำตอบทั่วไปของของสมการเชิงเส้นสามตัวแปรหนึ่งสมการ จะติดค่าพารามิเตอร์สองตัว

คำตอบเฉพาะ ของสมการดังกล่าวเกิดจากการแทนค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวด้วยต่าที่ต้องการ

กราฟของคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรหนึ่งสมการ จะเป็นเส้นตรงในระนาบ x-y ส่วนกราฟของคำตอบของสมการเชิงเส้นสามตัวแปรหนึ่งสมการ จะเป็นระนาบในปริภูมิสามมิติ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1) $4x - 2y = 4$

2) $x_1 - 7x_2 = 5$

3) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$

ระบบสมการเชิงเส้น

นิยาม
กำหนดให้ F เป็นฟิลด์ ชุดของสมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรซึ่งมีจำนวนจำกัด และ a_{ij}, b_i เป็นสเกลาร์ใน F
เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้น**

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

หมายถึงลำดับของสเกลาร์ ซึ่งเมื่อแทนในสมการแล้ว จะได้สมการที่เป็นจริง **ทุกสมการ**

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$

จากระบบสมการ $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ พบว่าแต่ละสมการมีกราฟของคำตอบเป็นเส้นตรง ซึ่งเส้นตรงทั้งสองไม่ขนานกัน จะพบว่าเส้นตรงทั้งสองจะตัดกันเพียงจุดเดียว จุดตัดดังกล่าวเป็นคำตอบของระบบสมการนั่นเอง

สำหรับระบบสมการ $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$ พบว่าสมการทั้งสองเป็นสมการเดียวกัน จึงถือได้ว่าระบบสมการมีเพียงสมการเดียว ดังนั้นคำตอบของระบบสมการจึงมีมากมายนับไม่ถ้วน กราฟของคำตอบของระบบสมการนี้เป็นเส้นตรงในระนาบสองมิติ

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ถ้ากำหนดระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

ระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว สามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทิกซ์ได้ดังนี้

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & d_3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

ระบบสมการ $\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 4z = 6 \end{cases}$

จัดตัวแปรของระบบสมการที่กำหนดให้ตรงกัน จะได้

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = -3 \\ 2x - 4z = 6 \end{cases}$$

ดังนั้น เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 5 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 2 & 0 & -4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ R_n เพื่อแทนแถวแต่ละแถวของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น แถวที่ 1 จะใช้สัญลักษณ์ R_1 ดังนั้นเมทริกซ์แต่งเติมในตัวอย่างข้างต้น อาจเขียนให้ชัดเจนขึ้น เพื่อเน้นแต่ละแถวของเมทริกซ์ อาจเขียนได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & \vdots & 5 \\ -1 & 3 & -1 & \vdots & -3 \\ 2 & 0 & -4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ระบบสมการ	เมทริกซ์แต่งเติม
$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -x + 3y = 12 \end{cases}$	
$\begin{cases} x + 10y - 3z = 10 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ \quad -7x + y = -3 \end{cases}$	
$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ \ x - 7y - 2z = 2 \\ \quad -7x + z = 0 \end{cases}$	

ตัวอย่างที่ 11 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นจากเมทริกซ์แต่งเติมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เมทริกซ์แต่งเติม	ระบบสมการ
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 7 \\ 2 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & -2 & \vdots & 7 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 9 & 5 & 6 & 3 & \vdots & -7 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$	

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation)

ความรู้พื้นฐานในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นคือ การสร้างระบบสมการเชิงเส้นขึ้นมาใหม่ที่ง่ายต่อการหาคำตอบยิ่งขึ้น โดยที่ระบบสมการเชิงเส้นที่สร้างขึ้นมาใหม่นี้ยังคงมีเซตคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเดิม ระบบสมการเชิงเส้นใหม่ที่สร้างขึ้นนี้ ซึ่งอาศัยการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้ เพื่อกำจัดตัวแปร

1. การคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์

2. การสลับกันระหว่างสมการสองสมการ

3. การบวกสมการหนึ่งด้วยผลคูณของสมการอื่นกับค่าคงตัว

เนื่องจากแต่ละแถวของเมทริกซ์แต่งเติม เกิดจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงตัวของแต่ละสมการที่สมนัยกัน ดังนั้นการดำเนินการ 3 ชนิดบนสมการดังกล่าวจะเหมือนกับการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้บนเมทริกซ์แต่งเติม

การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation: ERO)

1. การคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
2. การสลับกันระหว่างแถวสองแถวของเมทริกซ์แต่งเติม
3. การบวกแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยผลคูณของแถวอื่นกับค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 12 การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น

1. คูณแถวแรกด้วย $\frac{1}{2}$

Original Matrix *New Row-Equivalent Matrix*

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \tfrac{1}{2}R_1 \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. สลับกันระหว่างแถวแรกและแถวที่สอง ของเมทริกซ์แต่งเติม

Original Matrix *New Row-Equivalent Matrix*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. บวกแถวที่สามด้วย -2 เท่าของแถวแรก

Original Matrix *New Row-Equivalent Matrix*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 2R_1 \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวก จะขอกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

1. R_{ij} แทนการสลับกันระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j
2. $R_i + R_j \to R_i$ แทนการบวกแถวที่ i ด้วยแถวที่ j
3. mR_i แทนการนำค่าคงตัว m ไปคูณแถวที่ i
4. $R_i + mR_j \to R_i$ แทนการบวกแถวที่ i ด้วยผลคูณของแถวที่ j กับ m

▶ **Row Equivalent**
เมทริกซ์ A และ B มีมิติ m x n จะกล่าวว่า A สมมูลตามแถว (row equivalent) กับ B ก็ต่อเมื่อ B เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบน A เป็นจำนวนครั้งจำกัด จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \sim B$

ตัวอย่างที่ 13 ลองพิจารณาเปรียบเทียบการหาคำตอบโดยระบบสมการเชิงเส้น และการดำเนินการบนเมทริกซ์ดังนี้

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

เมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

บวกสมการแรกเข้ากับสมการที่สอง

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

บวกแถวแรกเข้ากับแถวที่สอง

$$R_2 + R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

บวก -2 เท่าของสมการแรกเข้ากับสมการที่ 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

บวก -2 เท่าของแถวแรกเข้ากับแถวที่ 3

$$R_3 - R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

บวกสมการที่สองเข้ากับสมการที่ 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

บวกแถวที่สองเข้ากับแถวที่ 3

$$R_3 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

คูณสมการที่ 3ด้วย $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

คูณสมการที่ 3 ด้วย $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

เราสามารถใช้เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว และขั้นบันไดลดรูปตามแถวในการหาคำตอบของระบบสมการ เราจำเป็นต้องใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นนั้น เพื่อให้ได้เมทริกซ์ใหม่ซึ่งเมทริกซ์ใหม่จะสมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ต้นแบบ คำตอบของระบบสมการจึงเป็นคำตอบเดียวกัน

ขั้นตอนนี้ เราบอกได้ว่า z = 2 ซึ่งสามารถแทนค่าย้อนกลับเพื่อคำนวณหาx และ y

$$y + 3(2) = 5$$
$$y = -1$$

แทนค่า y = -1 และ z = 2

$$x - 2(-1) + 3(2) = 9$$
$$x = 1$$

คำตอบคือ x = 1, y = -1 และ z = 2

***อย่าลืมตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่า x, y และ z ลงในระบบสมการเชิงเส้นเดิม

เมทริกซ์สุดท้ายที่ได้ในตัวอย่างข้างต้น เรียกว่าอยู่ใน **ลักษณะขั้นบันไดตามแถว** (row-echelon form) ซึ่งมีสมบัติดังนี้

▶ Technology
หากนักเรียนเข้าใจ Concept ของการดำเนินการตามแถวเบื้องต้น นักเรียนสามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณได้ ซึ่งมีหลายชนิดไม่ว่าจะเป็นเครื่องคำควณเชิงกราฟฟิค หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งมี Application ด้านเมทริกซ์รวมทั้งการดำเนินการตามแถวไว้อย่างครบถ้วนซึ่งจะขอแนะนำเครื่องคำนวณ Ti-92 โปรแกรม Maple และ Matlab

ลักษณะขั้นบันไดตามแถวและลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว
Row-Echelon Form and Reduced Row-Echelon Form

เมทริกซ์อยู่ใน**ลักษณะขั้นบันไดตามแถว (row-echelon form)** มีสมบัติดังนี้
1. แถวที่สมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ จะอยู่ด้านบนของเมทริกซ์ และแถวที่สมิชิกทุกตัวเป็นศูนย์จะอยู่ด้านล่างของเมทริกซ์
2. ในแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ จะมีสมาชิกตัวแรกเป็น 1 เรียกสมาชิกนำ (leading entry)
3. แถวสองแถวใดที่ติดกันและมีสมาชิกนำ สมาชิกนำในแถวล่างจะอยู่ในหลักที่อยู่ทางขวามือของหลักของสมาชิกนำในแถวบน

เมทริกซ์ที่อยู่ในรูป (row-echelon form) และหลักใดมีสมาชิกนำ สมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์จะเรียกว่าอยู่ใน**ลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว (Reduced Row-Echelon Form**)

ตัวอย่างที่ 14 Row-Echelon Form
เมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ในข้อ b. และ d. อยู่ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถวด้วย ส่วนเมทริกซ์ต่อไปนี้ไม่อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ f. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 15 จงทำให้เมทริกซ์ e. และ f. ในตัวอย่างข้างต้นอยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถว

1.2 การกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian Elimination)

เราอาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน (Gaussian elimination) ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่รวดเร็ว โดยเพียงแต่หาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติมเท่านั้น หลังจากนั้นก็ใช้วิธีแทนย้อนกลับ (back-substitution) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 16 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซีย
ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

▶ **คำตอบของระบบสมการ**
ระบบสมการเชิงเส้นแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ ประเภทที่ไม่มีคำตอบเรียกว่าระบบคล้องจองและประเภทที่ไม่มีคำตอบเรียกว่าระบบไม่คล้องจอง นอกจากนั้นระบบที่เป็นประเภทคล้องจองยังสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือ แบบที่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวและแบบที่มีคำตอบเป็นอนันต์ เครื่องมือที่จะช่วยตรวจสอบว่าระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้เป็นแบบใด ประเภทใด ที่สะดวกก็คือใช้เมทริกซ์ในการตรวจสอบ

ตัวอย่างที่ 17 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} \quad\;\; y + z - 2w = -3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 4y + z - 3w = -2 \\ x - 4y - 7z - w = -19 \end{cases}$$

วิธีทำ

▶ **คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น**

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถแบ่งได้ออกเป็น 3 แบบคือ **ไม่มีคำตอบ** ประเภทนี้จะเกิดขึ้นเมื่อสมการใดสมการหนึ่งไม่มีคำตอบ หรือเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน ประเภท**มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว** ประเภทนี้เกิดขึ้นเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงที่ต่างกันและตัดกัน และสุดท้ายเป็นประเภท**มีคำตอบเป็นอนันต์** ประเภทนี้จะเกิดขึ้นเมื่อกราฟของสมการเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ระบบสมการเชิงเส้นทุกระบบจะต้องเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งในสามอย่างนี้ คือไม่มีคำตอบ มีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบอนันต์ ระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเรียกว่าระบบ**คล้องจอง (consistent)** ระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีคำตอบเรียกว่าระบบ **ไม่คล้องจอง (inconsistent)**

ตัวอย่างที่ 18 ระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน

$$\begin{cases} x & -y & +2z & = & 4 \\ x & & +\ z & = & 6 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \\ 3x & +2y & -\ z & = & 1 \end{cases}$$

วิธีทำ

การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination)

เราอาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้อีกวิธีหนึ่ง วิธีนี้เรียกว่า **การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan Elimination)** โดยเพียงแต่หาเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวที่สมมูลกับเมทริกซ์แต่งเติมเท่านั้นจากนั้นเราสามารถอ่านค่าของตัวแปรได้ทันที อาจสรุปวิธีการได้ดังนี้

1. ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกของแถวแรกให้เป็น 1 และทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกของแถวอื่นให้เป็น 0
2. ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่สองของแถวที่สองให้เป็น 1 และทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่สองของแถวอื่นให้เป็น 0
3. ทำเช่นนี้ซ้ำกับแถวอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 19 จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x & +4y & & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & + & 6z & = & 24 \\ 3x & +y & & -2z & = & 4 \end{array}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 20 จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน
ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = & 9 \\ -x & +3y & & = & -4 \\ 2x & -5y & +5z & = & 17 \end{cases}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 21 **ระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์**

จงหาคำตอบของระบบสมการโดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

$$\begin{cases} 2x & +4y & +6z & = & 18 \\ 4x & +5y & +6z & = & 24 \\ 2x & +7y & +12z & = & 30 \end{cases}$$

วิธีทำ

ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems)

เราจะศึกษาลักษณะเฉพาะของระบบสมการเชิงเส้นบางประการ

นิยาม **สมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems)**

ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

เรียกว่าระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems)

จะพบว่าระบบสมการนี้จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบคือ (0, 0, 0, ..., 0) เรียกคำตอบนี้ว่า **คำตอบชัดแจ้ง (trivial solution)** นอกจากนี้เราพบว่า ระบบสมการแบบนี้เป็นระบบคล้องจอง นั่นคือคำตอบจะมียงสองแบบเท่านั้น คือ

1. เป็นระบบที่มีคำตอบชัดแจ้วเพียงคำตอบเดียว
2. เป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

ตัวอย่างที่ 22 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท	ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems) ที่มีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการจะเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

ตัวอย่างที่ 23 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -x+3y+2z=0 \end{cases}$$

วิธีทำ

อย่างไรก็ตามระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (Homogeneous Linear Systems) ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการอาจเป็นระบบที่มีคำตอบมากมายเป็นอนันต์ได้

ตัวอย่างที่ 24 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \\ -x-11y+6z=0 \end{cases}$$

วิธีทำ

แบบฝึกทักษะ 1.2

ข้อ 1 - 4 ให้นักเรียนหาสมาชิกของเมทริกซ์ในช่องว่างที่เกิดจากการดำเนินการตามแถว

1. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & \frac{8}{3} \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & & -7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & & \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & & \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & & \end{bmatrix}$

ข้อ 5-8 ให้นักเรียนหาการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นเมื่อกำหนดเมทริกซ์ต้นแบบและเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นมาให้

	เมทริกซ์ต้นแบบ	เมทริกซ์ใหม่
5.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$
8.	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

ข้อ 9-11 ให้นักเรียนตอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้อยู่ในลักษณะขั้นบันไดตามแถวหรือไม่ ถ้าใช่ให้นักเรียนใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ในลักษณะขั้นบันไดลดรูปตามแถว

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

12. กำหนดเมทริกซ์ A จงหาเมทริกซ์ที่สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ A ซึ่งเกิดจากการดำเนินการตามแถวต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a. $R_2 - 2R_1 \to R_2$

b. $R_3 - 3R_1 \to R_3$

c. $R_3 - R_2 \to R_3$

d. $-\frac{1}{5}R_2$

e. $R_1 - 2R_2 \to R_1$

ข้อ 13-14 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียน

13. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 6y = 16 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

ข้อ 15-16 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

15. $\begin{cases} 3x - 2y = -27 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 4y = -34 \end{cases}$

ข้อ 17-18 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีการกำจัดเกาส์เซียนหรือการกำจัดเกาส์-จอร์แดน

17. $\begin{cases} -x + y - z = -14 \\ 2x - y + z = 21 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -28 \\ 4y + 2z = 0 \\ -x + y - z = -5 \end{cases}$

▶ What you should learn
- จะพิจารณาว่าเมทริกซ์สองเมทริกซ์ใด ๆ เท่ากันอย่างไร
- จะบวกและลบเมทริกซ์และคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงได้อย่างไร
- จะคูณเมทริกซ์สองเมทริกซ์ใด ๆ ได้อย่างไร
- จะใช้การดำเนินการของเมทริกซ์ออกแบบและแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้อย่างไร

▶ Why you should learn it

การดำเนินการของเมทริกซ์สามารถใช้ในการออกแบบและแก้ปัญหาในชีวิตได้จริง เช่นการนำเมริกซ์ไปวิเคราะห์กำไรที่ชาวสวนผลไม้ได้จากการปลูกผลไม้ 2 ชนิด ซึ่งนักเรียนจะได้เห็นในตัวอย่างต่อไป

1.3 การดำเนินการบนเมทริกซ์ (Operations with Matrices)

การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equality of Matrices)

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะได้ชื่อว่าเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ จะกล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A, B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกๆ ค่าของ i และ j

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a^2 & 6 \\ b^2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4+b \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$a^2 = 25$ และ $a-2=-7$

นั่นคือ $a = \pm 5$ และ $a = -5$

ดังนั้น $a = -5$

และจาก $b^2 = 4$ และ $4+b = 6$

$b = \pm 2$ และ $b = 2$

ดังนั้น $b = 2$

ตัวอย่างที่ 26 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2^a & \log b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & (\log b)^2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$2^a = 16$ นั่นคือ $a = 4$

และ $\log b = (\log b)^2$

$(\log b)^2 - \log b = 0$

$\log b(\log b - 1) = 0$

$\log b = 1 , 0$

$b = 10 , 1$

ตัวอย่างที่ 27 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & a^0 \\ \log_a 1 & \ln e^3 \end{bmatrix}$

จงตรวจสอบว่า $A \overset{?}{=} B$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 28 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ จงตรวจสอบว่า $A\overset{?}{=}B$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 29 ให้ $A=\begin{bmatrix}x^2 & x-x^2\\2x & -x\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & -2\\4 & -x\end{bmatrix}$ ถ้า $A=B$ จงหาค่า x

ตัวอย่างที่ 30 ให้ $A=\begin{bmatrix}x^2+y^2 & 1\\x+y & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 1\\8 & 2\end{bmatrix}$ จงหา x^2+3^y

การบวกเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
(Matrix Addition and Scalar Multiplication)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ ดังนี้

นิยามของการบวกเมทริกซ์
ถ้าเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 31 **การบวกเมทริกซ์**

1). $\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 2+3\\0-1 & 1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5\\-1 & 3\end{bmatrix}$

2). $\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

นิยามของการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์
ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นสเกลาร์แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$

สัญลักษณ์ $-A$ หมายถึงการนำจำนวนจริง (-1) คูณกับเมทริกซ์ A ดังนั้น $-A = (-1)A$ เราสามารถนิยามการลบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

นิยามการลบเมทริกซ์
ถ้า A และ B เป็น m x n เมทริกซ์แล้ว A - B = A + (-B)

ตัวอย่างที่ 32 กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

1. จงหา 2A , -5B, 3C, A+C

2. จงหา A+B, B+A, D+E

3. จงหา A-B, B-A, D-E

4. . จงหา 2A - 3B, B - 4A, 2D - 5E

การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ มีสมบัติคล้ายกับการบวกและการคูณจำนวนจริง ดังนี้

สมบัติการบวกเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

เมื่อ S เป็นเซตของ m x n เมทริกซ์ A,B,C $\in$ S และ c, d เป็นสเกลาร์

สมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์

1) สมบัติปิดการบวก A+B$\in$S
2) สมบัติการสลับที่ A+B = B+A
3) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม A+(B+C) = (A+B)+C
4) มีเอกลักษณ์การบวก คือ $\bar{0}$
5) มี -A เป็นอินเวอร์สการบวกของ A

สมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

1) cA$\in$ S
2) (cd)A = c (dA)
3) 1A = A
4) c(A+B) = cA+cB
5) (c + d)A = cA +dA

ตัวอย่างที่ 33 Solving a Matrix Equation

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X เมื่อ 2X+A = B

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ Matrix Multiplication

นิยามการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$

ผลคูณ AB คือ เมทริกซ์ $AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i\,1}\ b_{1\,j} + \ a_{i\,2}\ b_{2\,j} + + \ a_{i\,n}\ b_{n\,j}$

ตัวอย่างที่ 34 กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

A = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ D = $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

จงหา AB, BA, AD, DA

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2(0)+6(5) & 2(2)+6(7) \\ -5(0)+3(5) & -5(2)+3(7) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 30 & 46 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$$

ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติ 3x3 และเมทริกซ์ B มีมิติ 3x3 แล้วนักเรียนสรุปได้ไหมว่า ผลคูณของเมทริกซ์ AB จะมีมิติเท่าไร นักเรียนทราบได้อย่างไร และหากเมทริกซ์ C มีมิติ 3x5 เมทริกซ์ AC และ CA จะหาค่าได้หรือไม่ ถ้าได้จะมีมิติเป็นอย่างไร

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์มีสมบัติดังนี้

สมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

เมื่อ S เป็นเซตของ m x n เมทริกซ์ A, B, C $\in$ S และ c เป็นสเกลาร์

1) AB $\in$ S
2) A(BC) = (AB)C
3) a(AB) = (aA)B = A(aB)
4) A(B+C) = AB + AC
5) (B+C)A = BA + CA

นิยามของเมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์เอกลักษณ์คือเมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ n x n) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้ลัญลักษณ์คือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทรานสโพสของเมทริกซ์(Transpose of Matrix)

ทรานสโพสของเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการเอาสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 1 และเอาสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 2 และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมด แทนทรานสโพสของ A ด้วย A^t

นิยามของทรานสโพสของเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^t โดยที่ $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

ตัวอย่างที่ 35 **ทรานสโพส**

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$

ตัวอย่างที่ 36 กำหนดเมทริกซ์ต่อไปนี้

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

จงหา A^t, B^t, C^t, D^t และ E^t

การประยุกต์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

เราสามารถแทนระบบสมการเชิงเส้นด้วยการใช้เมทริกซ์คูณเมทริกซ์ เช่น ถ้ามีระบบสมการเชิงเส้น

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว สามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

A **x** = **b**

เราสามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ A**x** = **b** เมื่อ A คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์
x คือเมทริกซ์ตัวแปร
b คือเมทริกซ์ค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดระบบสมการ

$$x + 2y = 10$$
$$2x - y = 5$$

จะได้สมการเมทริกซ์ *Ax =b* คือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

เรียก $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์ตัวแปร

และเรียก $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ ว่าเมทริกซ์ค่าคงตัว

เมทริกซ์แต่งเติมคือ [A:B]

$$[A:b] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

หากใช้การกำจัดเกาส์-จอร์แดนจะได้

$$[I:x] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้คือ x = 4 และ y = 3 ซึ่งเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างนักเรียนจะเห็นได้จัดว่าสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการของเมทริกซ์ได้ เมทริกซ์ที่เป็นส่วนสำคัญในการหาคำตอบของระบบสมการ คือเมทริกซ์ที่เกิดจาก A และ b ซึ่งเรียกว่าเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ [A:b] การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นทำได้โดยใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (ERO) กับเมทริกซ์แต่งเติม ดังที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วในหัวข้อแรก

แบบฝึกทักษะ 1.3

1. จงตรวจสอบว่า A = B หรือไม่ เมื่อกำหนด $x^3+x^2-x-1=0$ และ
   $A=\begin{bmatrix} x^3+x^2 & x^2-x \\ 1-x^2 & x-x^2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} x+1 & 1-x^3 \\ x^3-x & x^3-1 \end{bmatrix}$

2. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ใดเท่ากันบ้าง เมื่อกำหนด $x^2-x+1=0$ และ
   $A=\begin{bmatrix} x^2 & x-x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} x-x^2 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & x^2+1 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $A=-2[a_{ij}]_{2\ x\ 2}$ โดยที่ $a_{i\ j}=i\ -\ 3j$ จงหาผลบวกของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A

4. กำหนด $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ C เมื่อ C = 2A + 4B

5. กำหนด A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ 3X + 2(A-B) = 2(X + 2A) จงหาเมทริกซ์ X

6. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ AB

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^2 และ A^3

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^n เมื่อ $n \in I^+$

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ $B^tA^t + C^tA^t$

10. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $A^2 - 4A - 5I$

11. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $B = -2[b_{ij}]_{2\times 2}$ โดยที่ $b_{ij} \in R$ ซึ่งทำให้ AB = BA

12. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่า A^{10}

13. จงหาค่าของ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n$

14. จงหาค่าของ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^n$

15. ให้ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ และ $\theta > 0$ ที่เล็กที่สุด ที่ทำให้ $A^{16} = I$ และ $A^{16} = -I$ คือ $\theta = \theta_1$ และ $\theta = \theta_2$ ตามลำดับ แล้ว θ_1, θ_2 เท่ากับเท่าใด

16. ให้ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{16} = I$ และ $A^4 + I = \underline{0}$ และ $0^\circ \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ แล้ว θ เท่ากับเท่าใด

17. ให้ $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $\sum_{k=i}^{n} A^{3k}$

18. กำหนด $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ จงหา $a_1 + a_3$

19. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}$ ถ้า AB = BA จงหาค่า y

1.4 อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

▶What you should learn

- จะแสดงได้อย่างไรว่า เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใด ๆ เป็น อินเวอร์สซึ่งกันและกัน
- จะใช้สูตรในการหา อินเวอร์สของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ได้อย่างไร

ก่อนอื่นขอกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการตามแถวเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์จัตุรัส ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.1
ถ้า R เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถวที่มีมิติ n x n แล้ว R จะมีลักษณะอย่างใดอย่างหนึ่งระหว่าง R มีแถวที่เป็นศูนย์หมด หรือ R จะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

ในหัวข้อนี้ เราจะมาศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของเมทริกซ์ จะขอยกตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบกับในเรื่องระบบจำนวนจริงก่อน ดังนี้ สมมติเราต้องการหาคำตอบของสมการ ax = b เราสามารถทำได้โดยนำอินเวอร์สการคูณของ a นั่นคือ a^{-1} มาคูณทางซ้ายของสมการทั้งสองข้าง (โดยที่ $a \neq 0$)

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของ a เพราะว่า $a^{-1}a = 1$ ซึ่ง 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ ในเรื่องอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ก็มีลักษณะคล้ายกัน ดังนี้

บทนิยาม 1.4.1
กำหนดให้ A , B เป็น n x n เมทริกซ์

B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A ก็ต่อเมื่อ AB = BA = I

เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n x n

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณไม่ได้ เรียก A ว่าเมทริกซ์เอกฐาน (singular)

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณได้ เรียก A ว่าเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน

ตัวอย่างที่ 38 จงแสดงว่า $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ 1 x 1 และเมทริกซ์มิติ 2 x 2 สามารถทำได้ดังนี้

เมทริกซ์มิติ 1 x 1

ถ้า A = [a] โดยที่ a $\neq$ 0

แล้วจะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

เมทริกซ์มิติ 2 x 2

ถ้า A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{bmatrix}$ เมื่อ a , b , c , d $\in$ R และ ad - bc $\neq$ 0

แล้วจะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & \mathrm{a} \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 39 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

จงหาอินเวอร์สการคูณของ A และ B

สมบัติของอินเวอร์สของเมทริกซ์

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และสามารถหา A^{-1}, B^{-1} ได้

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$
4. $(A^{m})^{-1} = (A^{-1})^{m}$ เมื่อ $m \in I^{+}$
5. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ เมื่อ $k \in R$ และ $k \neq 0$

ตัวอย่างที่ 40 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a+3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐานแล้ว c จะต้องมีค่าเท่าใด

จึงจะทำให้สมการ $a^2x^2 + ax + c = 0$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

แบบฝึกทักษะ 1.4

ข้อ 1-4 จงแสดงว่าเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์เอกฐาน หรือเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน และหากเป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐานให้หาอินเวอร์สการคูณด้วย

1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

3 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$

1.5 เมทริกซ์มูลฐาน และวิธีการหา A^{-1}

เราเริ่มจากนิยามของเมทริกซ์มูลฐาน ดังนี้

นิยาม 1.5.1
เมทริกซ์ E ที่มีมิติ n x n จะเรียกว่า **เมทริกซ์มูลฐาน** เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่างที่ 41 ตัวอย่างของเมทริกซ์มูลฐาน

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.5.1
ถ้า E เป็นเมทริกซ์มูลฐานมีมิติ m x m และ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มิติ m x n แล้วผลคูณของ EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องชนิดเดียวกับ E

ตัวอย่างที่ 42 จงหาผลคูณ EA เมื่อ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 43 จงหาผลคูณ EA เมื่อ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาผลคูณ EA เมื่อ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 1.5.2
เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สได้ และอินเวอร์สที่ได้จะเป็นเมทริกซ์มูลฐานด้วย

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 45 จงหาอินเวร์สการคูณของของ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 1.5.3
กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้

2. ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A_{RR} = I_n$
4. A สามารถเขียนในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐาน

พิสูจน์

วิธีการหาตัวผกผัน

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n และหาอินเวอร์สได้ จากทฤษฎีบทข้างต้น เรา พบว่า $A_{RR} = I_n$

แสดงว่าจะต้องมีเมทริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ทำให้

$$\begin{aligned} E_k E_{k-1} \cdots E_1 A &= I_n \\ A^{-1} A &= I_n \\ Then \qquad A^{-1} &= E_k E_{k-1} \cdots E_1. \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดกระบวนการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ดังนี้

1. เขียน $\left[A \mid I_n\right]$
2. ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นบน $\left[A \mid I_n\right]$ จนได้ $\left[I_n \mid B\right]$
3. จะได้ $B = A^{-1}$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาอินเวอร์สการคูณของของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

แบบฝึกทักษะ 1.5

1. กำหนด

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา E_1, E_2, E_3, E_4 ที่ทำให้

1.1. $E_1A = B$

1.2. $E_2B = A$

1.3. $E_3A = C$

1.4. $E_4C = A$

2. จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

2.1 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

2.2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

2.3 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 11 \\ -1 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

2.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

2.5 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d \in \mathbb{R}$

2.6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d \in \mathbb{R}$

2.7 $A = 1\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}, \text{where } a \in \mathbb{R}$

2.8 $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}, \text{where } a,b,c,d \in \mathbb{R}$

1.6 ทฤษฎีบทอื่นๆ เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นและการมีตัวผกผัน

ในหัวข้อนี้จะรวบรวมทฤษฎีบทอื่นๆ ที่ยังไม่ได้กล่าวถึง โดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้

ทฤษฎีบท 1.6.1
ระบบสมการเชิงเส้นทุกระบบ จะต้องเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. ไม่มีคำตอบ
2. มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว
3. มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.6.2
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ มีมิติ $n \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times 1$ ใดๆ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีคำตอบ และมีเพียงคำตอบเดียว คือ
$X = A^{-1}B$

พิสูจน์

ตัวอย่างที่ 47 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

วิธีทำ จะได้สมการเมทริกซ์ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

จากสมการเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -25 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

คำตอบของสมการ คือ $x = 5, y = 1$

ทฤษฎีบท 1.6.3

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้
2. ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A_{RR} = I_n$
4. A สามารถเขียนในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐาน
5. ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะเป็นระบบคล้องจอง สำหรับทุก B ที่มีมิติ $n \times 1$
6. ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว สำหรับทุก B ที่มีมิติ $n \times 1$

แบบฝึกทักษะ 1.6

ข้อ 1-3 จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

1. $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3 - 9y = 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x - 3y - 3z = 8 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ -2x + y - z = 6 \\ 3x - 3y + 2z = -11 \end{cases}$

4. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} z - 5x + 16 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \\ 5z - 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

ค่าของ $x + y + z$ เท่ากับเท่าใด

5. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & \frac{2}{3} \end{array}\right]$ แล้ว $a + b - c$ มีค่าเท่าไร

6. ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว b_{31} มีค่าเท่าไร

▶ What you should learn
1. หาตัวผกผันของเมทริกซ์ทแยงมุม
2. หาตัวผกผันของเมทริกซ์สามเหลี่ยม
3. หาผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยม
4. นำสมบัติของเมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยมและเมทริกซ์สมมาตรไปใช้

เมทริกซ์สามารถนำไปประยุกต์ใน หลาย ๆ สาขาวิชา เช่นทางด้านธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ การประยุกต์ทางวงจรไฟฟ้า การวิเคราะห์การเลื่อนไหลของการจราจร การจำลอง Input-Output ของ Leontief ซึ่งนักเรียนสามารถหาความรู้เพิ่มเติมในส่วนนี้ได้

1.7 เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเมทริกซ์ที่มีลักษณะเฉพาะ โดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับการหาจัวผกผันและเมทริกซ์ที่สำคัญในพีชคณิตเชิงเส้น

1. เมทริกซ์ทแยงมุม

บทนิยาม 1.7.1
เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกว่า **เมทริกซ์ทแยงมุม** เมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ $\forall i\neq j$

รูปแบบทั่วไปของมทริกซ์ทแยงมุม n x n มิติ เป็นดังนี้

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$ หรืออาจเขียนย่อว่า $D=diag[d_1,d_2,\dots,d_n]$

ตัวอย่างที่ 48 กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ จงหา

1) DA
2) AD
3) D^2
4) D^3
5) D^{-1}
6) สรุปผลที่เกี่ยวข้องการการคูณของเมทริกซ์ทแยงมุม และตัวผกผัน

2. เมทริกซ์สามเหลี่ยม

- เมทริกซ์สามเหลี่ยม
- เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน
- เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง

บทนิยาม 1.7.2

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

1. เรียก A ว่า**เมทริกซ์สามเหลี่ยม** เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$ หรือ $\forall i < j$
2. เรียก A ว่า**เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน** เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$
3. เรียก A ว่า**เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง** เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i < j$

ทฤษฎีบท 1.7.1

ทรานสโพสของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และ
ทรานสโพสของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

ทฤษฎีบท 1.7.2

1. ผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่มีมิติเท่ากันเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน
2. ผลคูณของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่มีมิติเท่ากันเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ทฤษฎีบท 1.7.3

1. เมทริกซ์สามเหลี่ยมจะหาตัวผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักไม่เท่ากับศูนย์
2. ตัวผกผันของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนที่หาตัวผกผันได้ จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน
3. ตัวผกผันของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่หาตัวผกผันได้ จะเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ตัวอย่างที่ 49 จงยกตัวอย่างเมทริกซ์เพื่อตรวจสอบ ทฤษฎีบท 1.7.1 - 1.7.3

3. เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

บทนิยาม 1.7.3
เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร** เมื่อ $A^T = A$

ทฤษฎีบท 1.7.4
ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีมิติเท่ากัน และ k เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว
1. A^T เป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
3. $A-B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
4. kA เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ทฤษฎีบท 1.7.5
ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่หาตัวผกผันได้แล้ว A^{-1} จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

ทฤษฎีบท 1.7.6
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ แล้ว AA^T และ A^TA จะเป็นเมทริกซ์สมมาตร

ทฤษฎีบท 1.7.7
ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่หาตัวผกผันได้แล้ว AA^T และ A^TA จะเป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้

ตัวอย่างที่ 50 จงยกตัวอย่างเมทริกซ์เพื่อตรวจสอบ ทฤษฎีบท 1.7.5 - 1.7.7

แบบฝึกทักษะ 1.7

1. กำหนด $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & -x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -y & 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

\

2. กำหนด A = $[a_{ij}]_{2 \times 2}$ โดยที่ $a_{ij} \in$ R และ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A

3. กำหนด X = $[\, x_1 \quad x_2 \,]$ โดยที่ $x_1 + x_2 = 1$ และกำหนด $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ XA = X

4. จงหา $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^5 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{100}$

5. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 1.7.5 - 1.7.7