2. ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์จัตุรัส

The Determinant of Square Matrix

▶What you should learn
- จะหาดีเทอร์มิรนันต์ของเมทริกซ์มิติ 2x2 อย่างไร
- จะหาดีไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์จตุรัสได้อย่างไร
- จะหาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มิติจตุรัสอย่างไร

▶Why you should learn it
ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์มักใช้ในสาขาอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ ดีเทอร์มินันต์บางแบบมีประโยชน์เมื่อเปลี่ยนตัวแปรในวิชาแคลลูลัส

ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) คือฟังก์ชันหนึ่งที่ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ n ในมิติ n×n ของเมทริกซ์จัตุรัส A ส่วนความหมายทางเรขาคณิตเบื้องต้น ดีเทอร์มิแนนต์คือตัวประกอบมาตราส่วน (scale factor) ของปริมาตร เมื่อ A ถูกใช้เป็นการแปลงเชิงเส้น ดีเทอร์มิแนนต์เป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับทั้งพีชคณิตเชิงหลายเส้น (multilinear algebra) และแคลคูลัส ซึ่งใช้สำหรับกฎการแทนที่ (substitution rule) ในตัวแปรบางกลุ่ม

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่กำหนดขึ้น ฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์จะมีเพียงหนึ่งเดียวบนเมทริกซ์มิติ n×n เหนือริงสลับที่ใดๆ (commutative ring) โดยเฉพาะเมื่อฟังก์ชันนี้นิยามไว้บนริงสลับที่ที่เป็นฟีลด์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

ข้อตกลงเบื้องต้น
1. เมทริกซ์ที่จะนำมาหาดีเทอร์มินันต์ได้ต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสแล้ว ดีเทอร์มินันต์ของ A จะเขียนด้วย det(A) หรือ |A|

ดีเทอร์มินันต์เมทริกซ์มิติ 2 X 2

กำหนดเมทริกซ์มิติ 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ

$$\det(A) = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ดีเทอร์มินันต์เมทริกซ์มิติ 3 X 3

เราสามารถหาดีเทอร์มินันต์โดยการเขียนหลักที่ 1 และ 2 เพิ่มต่ออีก 2 หลัก หลังจากนั้นใช้หลักการคูณทแยงนำจำนวนทั้งหมดมาบวกกัน และจำนวนที่เกิดจากการคูณทแยงขึ้นไปลบออก

กำหนด A เป็น 3 x 3เมทริกซ์ และ A = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ det (A) หรือ $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$

ซึ่ง $\det(A) = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด A = [5] B = [-8] จงหา $\det(A)$ และ $\det(B)$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\det(A)\det(B)\det(C)$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$

2.1 การหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยการกระจายโคแฟคเตอร์

ก่อนอื่นนักเรียนรู้จัก Minor และ Cofactor ก่อน ซึ่งจะขอนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.1 Minor
กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n x n โดยที่ n $\geq$ 2
1. ไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}
2. ไมเนอร์ของ a_{ij} คือดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ จงหาไมเนอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

บทนิยาม 2.1.2 Cofactor
กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n x n โดยที่ n $\geq$ 2
1. โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij}
2. โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} คือ $(-1)^{i+j} M_{ij}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาโคแฟกเตอร์ทั้งหมดของ A

เมื่อเรารู้จัก Minor และ Cofactor จะสามารถหาค่าดีเทอร์มินันต์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.1

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดย a_{ij} เป็นสเกลาร์ และ n ≥ 2 จะได้

1. $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}, \forall i$ เมื่อกระจายโคเฟกเตอร์ตามแถวที่ i
2. $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}, \forall j$ เมื่อกระจายโคเฟกเตอร์ตามหลักที่ j

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det (A) โดยใช้โคแฟกเตอร์

ตัวอย่างที่ 8 กำหนด A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา det (A)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

นิยาม 2.1.3

กำหนด $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ และ C_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

แอดจอยท์ของ A (adjoint of A) เขียนแทนด้วย $adj(A)$ หมายถึงเมทริกซ์รูปต่อไปนี้

$$adj(A)=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 2.1.2

ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ a_{ij} เป็นสเกลาร์ และ $n\in \mathrm{I}, n\geq 2$ แล้ว

1. $A\,adj(A)=adj(A)A=\det(A)\ I$
2. ถ้า $\det(A)\neq 0$ แล้ว $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

Proof

ตัวอย่างที่ 9 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อ A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว $b_{31} + b_{23}$ มีค่าเท่าใด

▶ What you should learn
- จะใช้กฎของคราเมอร์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างไร
- จะใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ แก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างไร
- จะใช้ ERO แก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างไร

นอกจากเราจะใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation) ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อแรก เรายังสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อีก ดังต่อไปนี้

การแก้ระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

ทฤษฎีบท 2.2.2 กฎของคราเมอร์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ n x n โดยที่ det (A) $\neq$ 0 แล้วระบบสมการที่เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ AX = B เมื่อตัวไม่ทราบค่า คือ x_1 , x_2 , $\dots$, x_nและ b_1 , b_2 , $\dots$,b_n เป็นค่าคงตัว

โดยมี $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

มีคำตอบคือ $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots$, $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$2x + 3y = 9$$
$$2x - 3y = 3$$

จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 20 \\ 7x + y + z = 23 \end{cases}$$

จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

แบบฝึกทักษะ 2.1

1. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   a. จงหาไมเนอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

   b. จงหาโคเฟกเตอร์ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

   c. จงหา det(A) โดยการกระจายโคเฟกเตอร์ และเปรียบเทียบคำตอบจากการใช้สูตร

   d. จงหา A^{-1} จากดีเทอร์มินันต์

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

ข้อ 3-5 จงหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 3 - 2y = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 2x + 2y = 19 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ -x + 4y + 2z = -4 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$

2.2 การหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยการลดรูปตามแถว

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า A มีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทุกตัว แล้ว $\det(A)=0$

Proof

ทฤษฎีบท 2.2.2

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $\det(A)=\det(A^T)$

Proof

ทฤษฎีบท 2.2.3

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

1. ถ้าคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยค่าคงที่ c แล้วดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่คือ c det (A)
2. ถ้าสลับที่กันระหว่างแถวสองแถวใด ๆ (หรือหลักสองหลักใด ๆ) ของ A แล้ว ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่คือ - det (A)
3. ถ้าเปลี่ยนแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A โดยใช้ค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์คูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถว (หรือหลัก) ที่ต้องการเปลี่ยนนั้นโดยบวกสมาชิกในลำดับเดียวกันเข้าด้วยกัน แล้วใช้ผลบวกแทนที่สมาชิกเดิมแล้วดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่เท่ากับ det(A)

ทฤษฎีบท 2.2.4
ให้ A เป็นเมทริกซ์มูลฐาน (Elementary Matrix)
1. ถ้า E เป็นผลจากการคูณเมทริกซ์ I_n ด้วยค่าคงที่ k แล้ว $\det(E) = k$
2. ถ้า E เป็นผลจากการสลับแถวของสองแถวใดใน I_n แล้ว $\det(E) = -1$
3. ถ้า E เป็นผลจากการคูณแถวใดแถวหนึ่งแล้วบวกกับแถวอื่นใน I_n แล้ว $\det(E) = 1$

ตัวอย่างที่ 13 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าดีเทอร์มินันต์โดยการลดรูปตามแถว

ตัวอย่างที่ 14 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ จงหาค่าดีเทอร์มินันต์

โดยการลดรูปตามคอลัมน์

แบบฝึกทักษะ 2.2

1. จงแสดงว่า $\det(A) = \det(A^T)$ เมื่อ

   a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ต่อไปโดยวิธีตรวจวิเคราะห์ ใช้ความรู้จากทฤษฎีบทที่ได้เรียน

   a. $\begin{vmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

   b. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

   c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   e. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. จงหาเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวที่สมมูลกับขเมทริกซ์ที่กำหนดให้ แล้วหาค่าดีเทอร์มินันต์

   a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. กำหนด $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ จงหา

   a. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

   b. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

   c. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

5. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 2.2.4

2.3 สมบัติของดีเทอร์มินันต์ฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 2.3.1 สมบัติของดีเทอร์มินันต์
ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n และ k เป็นสเกลาร์แล้ว
1. $\det(kA) = k^n \det(A)$
2. $\det(A^k) = [\det(A)]^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.2
ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n และมีสมาชิกแตกต่างกันเพียงแถวเดียว แถวที่แตกต่างกันคือแถวที่ r ซึ่งสมาชิกแถวที่ r ของ C เกิดจากการบวกกันของสมกชิกแถวที่ r ของ A และ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน แล้ว

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนจากแถวเป็นหลัก

ทฤษฎีบท 2.3.3
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n และ E เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่มีมิติ n x n แล้ว

$$\det(EA) = \det(E)\det(A)$$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.4
เมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ ก็ต่อ เมื่อ $\det(A) \neq 0$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.5
ถ้า A,B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n แล้ว

det(AB) = det(A) det(B)

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.6
ถ้าเมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ แล้ว $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.3.7
กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ n x n ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้
2. ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A_{RR} = I_n$
4. A สามารถเขียนในรูปผลคูณของเมทริกซ์มูลฐาน
5. ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะเป็นระบบคล้องจอง
   สำหรับทุก B ที่มีมิติ $n \times 1$
6. ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว
   สำหรับทุก B ที่มีมิติ $n \times 1$
7. det(A) $\neq$ 0

Note:

1. ถ้า A = B แล้วสรุปได้ว่า det (A) = det (B)
2. ถ้า det (A) = det (B) แล้วไม่สามารถสรุปได้ว่า A = B
3. det (A+B) $\neq$ det (A) + det (B)

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่าdet(A) เมื่อกำหนด A = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่า det(A) เมื่อกำหนด A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนด A = $\begin{bmatrix} x & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2x \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 2x & -x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาค่า x ที่ทำให้ det(A) = 4 det(B)

ตัวอย่างที่ 18 กำหนด A = $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

จงหา det(*ABCD*)

ตัวอย่างที่ 19 ถ้า $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

จงหา $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$

ระบบสมการเชิงเส้นในรูป $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

การประยุกต์ในพีชคณิตจำนวนมากเกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของสมการ

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ระบบสมการนี้สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda I_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ดังแสดงให้เห็น ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ และเป็นระบบคล้องจอง (มีคำตอบชัดแจ้งเป็นคำตอบหนึ่งของสมการ)

เราต้องการหาค่าสเกลาร์ λ ที่ทำให้ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ มีคำตอบอื่นนอกเหนือจากคำตอบชัดแจ้ง (คำตอบชัดแจ้งเป็นคำตอบที่ไม่มีความสำคัญ เพราะทุกค่าเป็นศูนย์) เรียก**คำตอบไม่ชัดแจ้ง (nontrivial solutions)** ต่อไปเราจะเรียกสเกลาร์ λ ว่า**ค่าเฉพาะ (eigenvalue)** ของ A และคำตอบไม่ชัดแจ้งที่ได้จะเรียกว่า**เวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector)** ของ A ที่สมนัยกับค่าเฉพาะ λ เรื่องเหล่านี้จะศึกษาอย่างละเอียดต่อไป

คำตอบไม่ชัดแจ้งของ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ได้จากการพิจารณาตัวผกผันของ $A - \lambda I_n$ นั้นคือ $A - \lambda I_n$ ต้องหาตัวผกผันไม่ได้ ดังนั้นเราจะพิจารณาค่าดีเทอร์มินันต์ จึงกล่าวได้ว่าระบบสมการ $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ จะมีคำตอบไม่ชัดแจ้งก็ต่อเมื่อ

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

เรียกสมการลักษณะเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

แบบฝึกทักษะ 2.3

1. จงหาค่า det(kA) เมื่อ

   a. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, k=2$

   b. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}, k=-2$

2. จงหาค่า det(AB) เมื่อ $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3. จงอธิบายว่าเหตุใด det(A)=0 เมื่อกำหนด $A=\begin{bmatrix}-2 & 8 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 1 & 10 & 6 & 5\\ 4 & -6 & 4 & -3\end{bmatrix}$ โดยไม่ต้องคำนวณ

4. จงหาค่า k ที่ทำให้เมทริกซ์เหล่านี้ไม่มีตัวผกผัน

   a. $A=\begin{bmatrix}k-3 & -2\\ -2 & k-2\end{bmatrix}$

   b. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 6\\ k & 3 & 2\end{bmatrix}$

5. ในแต่ละระบบสมการเชิงเส้น จงหา

    i. สมการลักษณะเฉพาะ

    ii. ค่าเฉพาะ

    iii. เวกเตอร์เฉพาะ

a. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$