เซต

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต

1. การเขียนเซต

1. แบบแจกแจงสมาชิก เช่น $\{1,3,5,7,9\}$
2. แบบบอกเงื่อนไข เช่น $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า $10\}$

เขียน $x \in A$ แทน "x เป็นสมาชิกของเซต A" และ $x \notin A$ แทน "x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A"

2. เซตจำกัดและเซตอนันต์

1. **เซตจำกัด** คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น $\{-3,1,0,2\}$
   เขียนแทนจำนวนสมาชิกของ A ด้วย $n(A)$
2. **เซตอนันต์** คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น $\{1,2,3,\ldots\}$

3. เซตว่างและเอกภพสัมพัทธ์

1. **เซตว่าง** คือเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{\ \}$
2. **เอกภพสัมพัทธ์** คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น มักเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ด้วย U

2. ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

1. **สับเซต** A เป็นสับเซตของ B ($A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

2. **การเท่ากันของเซต** $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ข้อสังเกต
1. $\phi \subset A$, $A \subset A$, $A \subset U$
2. เรียกสับเซตของ A ที่ไม่เท่ากับ A ว่า **สับเซตแท้**ของ A
3. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ $n(A) = m$ แล้ว A จะมีสับเซตต่างกันทั้งหมด 2^m สับเซต

3. เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ นิยามโดย $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$

ข้อสังเกต $\phi \in P(A)$ และ $A \in P(A)$

4. การดำเนินการของเซต

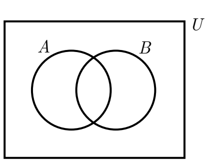
1. **อินเตอร์เซกชัน** $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
2. **ยูเนียน** $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
3. **คอมพลีเมนท์** $A' = \{x \mid x \notin A\}$
4. **ผลต่าง** $A - B = \{x \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

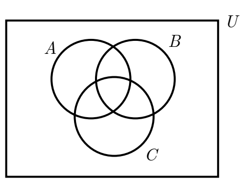
1.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.	$A \cup B = B \bigcup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
6.	$(A')' = A$	
7.	$\phi' = U$	$U' = \phi$
8.	$A \cup \phi = A$ $A - \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$ $\phi - A = \phi$
9.	$U \cup A = U$ $U - A = A'$	$U \cap A = A$ $A - U = \phi$
10.	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \phi$
11.	$A - B = A \cap B'$	
12.	ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$	

5. สูตรเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

สำหรับเซตจำกัด A, B, C ใดๆ

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$





ตรรกศาสตร์

1. ประพจน์

ประพจน์ คือประโยคที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธก็ได้

2. นิเสธและตัวเชื่อมประพจน์

เราสร้างประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับเดิมได้โดยอาศัยตัวดำเนินการที่เรียกว่า**นิเสธ** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim$ ซึ่งสามารถแสดงค่าความจริงด้วยตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

นอกจากนี้ประพจน์สองประพจน์สามารถเชื่อมกันได้ด้วยตัวเชื่อมประพจน์ต่างๆ กัน 4 แบบคือ

1. ตัวเชื่อม **และ** เขียนแทนด้วย $\wedge$ 2. ตัวเชื่อม **หรือ** เขียนแทนด้วย $\vee$

3. ตัวเชื่อม **ถ้า...แล้ว** เขียนแทนด้วย $\rightarrow$ 4. ตัวเชื่อม **ก็ต่อเมื่อ** เขียนแทนด้วย $\leftrightarrow$

ซึ่งสามารถแสดงค่าความจริงสำหรับประพจน์ที่มีตัวเชื่อมต่างๆ ได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

หลักในการจำค่าความจริงสำหรับตัวเชื่อมต่างๆ

1. ตัวเชื่อม **และ** เป็น T เมื่อทั้งคู่เป็น T นอกนั้นเป็น F
2. ตัวเชื่อม **หรือ** เป็น F เมื่อทั้งคู่เป็น F นอกนั้นเป็น T
3. ตัวเชื่อม **ถ้า...แล้ว** เป็น F สำหรับ T $\rightarrow$ F เพียงกรณีเดียวเท่านั้น ที่เหลือเป็น T
4. ตัวเชื่อม **ก็ต่อเมื่อ** ถ้าเหมือนกันเป็น T และถ้าต่างกันเป็น F

3. ตารางค่าความจริง

การสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์เป็นการแจงทุกกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งทำได้ไม่ยากแต่เสียเวลา หากมีประพจน์ย่อยต่างกันทั้งสิ้น n ประพจน์ จะมีกรณีที่แตกต่างกันทั้งหมด 2^n กรณี

ตัวอย่าง จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \wedge \sim q$

วิธีทำ

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$(p \to q) \wedge \sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

4. ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ใดๆ สองประพจน์สมมูลกัน เมื่อไม่ว่าค่าความจริงในประพจน์ย่อยจะเป็นอย่างไร ค่าความจริงของทั้งสองประพจน์นั้นจะเหมือนกันทุกกรณี การตรวจสอบการสมมูลสามารถทำได้โดยสร้างตารางค่าความจริงหรืออาศัยประพจน์สมมูลพื้นฐานเข้าช่วย **ถ้า p และ q เป็นประพจน์ที่สมมูลกัน จะเขียนแทนด้วย** $p \equiv q$ เพื่อให้ตรวจสอบประพจน์ที่สมมูลกันได้ง่าย เราอาจอาศัยรูปแบบที่สมมูลกันต่อไปนี้เข้าช่วย

1. การสลับที่

$$p \vee q \equiv q \vee q$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

3. การกระจาย

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

6. นิเสธ

$$\sim(\sim p) \equiv p$$
$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

2. การจัดหมู่

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

4. ถ้า...แล้ว และ ก็ต่อเมื่อ

$$p \to q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \to \sim p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

5. เอกลักษณ์

$$p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \wedge \mathrm{T} \equiv p$$
$$p \vee \mathrm{F} \equiv p$$

5. สัจนิรันดร์

เราจะเรียกประพจน์ใดว่า **สัจนิรันดร์** ก็ต่อเมื่อไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อยจะเป็นอะไรก็ตาม ค่าความจริงของประพจน์นั้นจะเป็นจริงเสมอ

6. ประโยคเปิดและวลีบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร ประโยคเปิดไม่เป็นประพจน์ แต่ถ้าแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วเราจะได้ประพจน์ การทำประพจน์เปิดให้เป็นประพจน์สามารถทำได้โดยการใส่ **วลีบ่งปริมาณ** ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 2 ตัว คือ "$\forall$" (for all, ทุกๆ) และ "$\exists$" (for some, บางตัว) ซึ่งการกำหนดค่าความจริงและการใส่นิเสธเป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ข้อความ	เงื่อนไขที่ทำให้จริง	เงื่อนไขที่ทำให้เท็จ
$\forall x[P(x)]$	ทุกๆ x ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x)$ จริง	มีบาง x ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x)$ เท็จ
$\exists x[P(x)]$	มีบาง x ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x)$ จริง	ทุกๆ x ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x)$ เท็จ

ในบางครั้งประโยคเปิดของเราอาจมีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้ เช่น ให้ $P(x,y)$ เป็นประโยคเปิดที่แทนข้อความว่า "$x+y=5$" หรือ $Q(x,y,z)$ แทนข้อความ "$x+y+z=1$" เป็นต้น การกำหนดค่าความจริงและการใส่นิเสธของประโยคเปิดสองตัวแปรเป็นดังนี้

ข้อความ	เงื่อนไขที่ทำให้จริง	เงื่อนไขที่ทำให้เท็จ
$\forall x \forall y[P(x,y)]$	ทุก x ทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ จริง	มีบาง x และมีบาง y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ
$\forall x \exists y[P(x,y)]$	ทุก x ในเอกภพสัมพัทธ์ จะหา y ที่ทำให้ $P(x,y)$ จริงได้	มีบาง x ที่ทำให้ทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ
$\exists x \forall y[P(x,y)]$	มีบาง x ซึ่งทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ	ทุก x ในเอกภพสัมพัทธ์ จะหา y ที่ทำให้ $P(x,y)$ เท็จได้
$\exists x \exists y[P(x,y)]$	มีบาง x และมีบาง y ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $P(x,y)$ จริง	ทุก x และทุก y ในเอกภพสัมพัทธ์ ทำให้ $P(x,y)$ เท็จ

7. นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ

1. $\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$
2. $\sim \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$
3. $\sim \forall x \forall y[P(x,y)] \equiv \exists x \exists y[\sim P(x,y)]$
4. $\sim \forall x \exists y[P(x,y)] \equiv \exists x \forall y[\sim P(x,y)]$
5. $\sim \exists x \forall y[P(x,y)] \equiv \forall x \exists y[\sim P(x,y)]$
6. $\sim \exists x \exists y[P(x,y)] \equiv \forall x \forall y[\sim P(x,y)]$

8. การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลคือการอ้างว่าเมื่อมีข้อความ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่งเป็นจริง จะสามารถสรุปข้อความ q ได้หรือไม่ นั่นคือข้อความ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่นั่นเอง

ถ้าข้อความ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ เราจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนี้**สมเหตุสมผล** (valid) ถ้าไม่เป็นสัจนิรันดร์จะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนี้**ไม่สมเหตุสมผล** (invalid)

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $\sim t \rightarrow \sim r$

2. $\sim s$

3. $t \rightarrow w$

4. $r \vee s$

ผล w

วิธีทำ

กำหนดให้เหตุข้อ 1, 2, 3 และ 4 เป็นจริง จะได้ว่า

1. $\sim s$ (จากเหตุผลข้อ 2)
2. r (จากข้อ 1 และเหตุข้อ 4)
3. t (จากข้อ 2 และเหตุข้อ 1)
4. w (จากข้อ 3 และเหตุข้อ 3)

สรุปได้ว่า การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

จำนวนจริง

1. ผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวน

- จำนวนจริง ($\mathbb{R}$)
  - จำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$)
  - จำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$)
    - จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม
    - จำนวนเต็ม (I)
      - จำนวนเต็มลบ
      - จำนวนเต็มศูนย์
      - จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือจำนวนนับ ($\mathbb{N}$)

2. รากของสมการพหุนาม

1. รากตรรกยะของสมการพหุนาม

สมการพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ และ $a_n \neq 0$ จะมีรากตรรกยะที่อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{r}{s}$ เมื่อ r หาร a_0 ลงตัวและ s หาร a_n ลงตัว

2. ทฤษฎีบทเศษเหลือ

กำหนด $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ และ $a_n \neq 0$ เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$ จะได้เศษเท่ากับ $p(c)$

3. สมบัติของอสมการ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
6. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $0 < ac < bd$
7. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

4. ค่าสัมบูรณ์และสมบัติของค่าสัมบูรณ์

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

สำหรับจำนวนจริง a ใดๆ

1. $\sqrt{a^2} = |a|$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
6. $|a|^2 = a^2$
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$
8. ถ้า $a > 0$ แล้ว

    8.1 $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

    8.2 $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

    8.3 $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$

    8.4 $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

5. การแก้อสมการที่แยกตัวประกอบได้

1. ถ้าจะคูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยค่าคงตัวหรือนิพจน์ จะต้องตรวจสอบว่าค่าคงตัวหรือนิพจน์นั้นมีค่าเป็นบวกหรือลบอย่างใดอย่างหนึ่งและอาจต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการให้เหมาะสม

2. พยายามจัดให้ข้างหนึ่งของอสมการเป็น 0 แล้วจึงแยกตัวประกอบ

3. เนื่องจากจำนวนจริงที่ยกกำลังด้วยเลขคี่จะมีเครื่องหมายคงเดิม และจำนวนจริงที่ยกกำลังคู่จะมีค่าเป็นศูนย์หรือบวกเท่านั้น จึงสามารถพิจารณาอสมการที่แยกตัวประกอบแล้วบางวงเล็บมีเลขยกกำลังได้ดังนี้

    3.1 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคี่ ให้แก้อสมการเสมือนหนึ่งว่าวงเล็บนั้นยกกำลังหนึ่ง

    3.2 ถ้าวงเล็บใดยกกำลังด้วยเลขคู่ ให้ตัดวงเล็บนั้นออกจากการพิจารณาก่อน แต่เมื่อได้คำตอบแล้วจะต้องพิจารณาอีกครั้งว่าวงเล็บที่ตัดออกไปก่อนนั้นมีผลต่อเซตคำตอบหรือไม่ แล้วจึงปรับคำตอบให้ถูกต้อง

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. การหารลงตัวและจำนวนเฉพาะ

1. m หาร n ลงตัวก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $mc = n$ ให้เขียนแทนด้วย $m \mid n$

2. จำนวนเต็มบวก $p \geq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อจำนวนเต็มบวกที่หาร p ลงตัวอยู่ในเซต $\{1, p\}$

3. จำนวนเต็ม $n > 1$ จะแยกตัวประกอบ $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่ซ้ำกันได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น เมื่อไม่คำถึงนึงลำดับในการเขียน

2. ทฤษฎีบทที่สำคัญสำหรับจำนวนเต็ม

1. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

2. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$

3. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid bx + cy$ สำหรับจำนวนเต็ม x และ y ใดๆ

4. ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \mid mn$ แล้ว $p \mid m$ หรือ $p \mid n$

3. ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) และตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

1. จำนวนเต็มบวก g จะเป็นตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม m กับ n ที่ไม่เป็น 0 พร้อมกัน เมื่อ

   (1) g เป็นตัวหารร่วมของ m กับ n นั่นคือ $g \mid m$ และ $g \mid n$

   (2) ในบรรดาตัวหารร่วมทั้งหมดของ m และ n ตัวหารร่วมที่มีค่ามากที่สุดคือ g

   ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ m และ n เขียนแทนด้วย (m, n)

2. จำนวนเต็มบวก c จะเป็นตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนเต็ม m กับ n ซึ่งทั้งคู่ไม่เป็น 0 เมื่อ

   (1) c เป็นตัวคูณร่วมของ m กับ n นั่นคือ $m \mid c$ และ $n \mid c$

   (2) ในบรรดาตัวคูณร่วมบวกทั้งหมดของ m และ n ตัวคูณร่วมที่มีค่าน้อยที่สุดคือ c

   ตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.) ของ m และ n เขียนแทนด้วย $[m, n]$

3. ถ้า m และ n มี ห.ร.ม. เท่ากับ 1 แล้วจะกล่าวว่า m และ n เป็น**จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**กัน

4. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $(m, n) = mx + ny$ เสมอ (และมีได้มากกว่าหนึ่งคู่)

5. $(m, n) = 1$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $mx + ny = 1$

6. ถ้า $g = (m, n)$ แล้ว $(\frac{m}{g}, \frac{n}{g}) = 1$

7. $(m, n)[m, n] = mn$

เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเมทริกซ์

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ } 1 \\ \leftarrow \text{แถวที่ } 2 \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ } m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ } 1 & \text{หลักที่ } 2 & \text{หลักที่ } n \end{array} \end{array}$$

1. บทนิยามและสัญลักษณ์

1. เมทริกซ์เป็นกลุ่มของจำนวนหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เขียนเรียงกันในลักษณะของสี่เหลี่ยมมุมฉาก
2. เมทริกซ์ A ข้างต้น ประกอบด้วยแถว m แถว และหลัก n หลัก จึงกล่าวว่าเมทริกซ์ A มี**มิติ** $m \times n$
3. ใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทนสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A
4. เขียน $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ แทน "A เป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิก a_{ij} และมีมิติ $m \times n$"

2. เมทริกซ์พิเศษที่สำคัญ

1. **เมทริกซ์ศูนย์** คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์
2. **เมทริกซ์จัตุรัส** คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ เราจะนิยาม **เส้นทแยงมุมหลัก**ของเมทริกซ์ A เป็นแนวของสมาชิก $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ จากมุมซ้ายบนไปมุมขวาล่าง

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. **เมทริกซ์เอกลักษณ์** คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 และสมาชิกที่เหลือเป็นศูนย์ เขียน $I_{n\times n}$ แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. การดำเนินการและความสัมพันธ์ของเมทริกซ์

1. การเท่ากันของเมทริกซ์

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์มีมิติเดียวกันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

2. การบวกและการลบเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$

3. การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ k เป็นสเกลาร์ (จำนวนหรือนิพจน์ทางคณิตศาสตร์) แล้ว $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$

4. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ แล้วจะได้ $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

กล่าวง่ายๆ ว่า c_{ij} เป็น**ผลคูณระหว่างแถวที่ i ของเมทริกซ์ A กับหลักที่ j ของเมทริกซ์ B**

โดยทั่วไปแล้ว $AB \neq BA$ นั่นคือ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่

5. ทรานสโพส

ทรานสโพสเป็นการสลับเปลี่ยนระหว่างแถวกับหลักของเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ แล้วทรานสโพสของ A เขียนแทนด้วย A^t โดยที่

$$A^t = [b_{ij}]_{n\times m} \text{ และ } b_{ij} = a_{ji}$$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการของการดำเนินการของเมทริกซ์

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$ ใดๆ และ $[0]$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์มิติ $m\times n$ จะได้

1. $A + B = B + A$ *(การสลับที่สำหรับการบวก)*
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก)*
3. $A + [0] = [0] + A = A$ *(เอกลักษณ์การบวก)*
4. $A + (-A) = (-A) + A = [0]$ เมื่อ $-A = (-1)A$ *(อินเวอร์สการบวก)*

กำหนด A, B, C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่ทำให้การดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย จะได้

5. $(AB)C = A(BC)$ *(การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ)*
6. $A(B+C) = AB + AC$ และ $(B+C)A = BA + CA$ *(การกระจาย)*
7. $AI = IA = A$ เมื่อ A และ I เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน *(เอกลักษณ์การคูณเมทริกซ์จัตุรัส)*

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่การดำเนินการในแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมาย จะได้

8. $(A^t)^t = A$
9. $(A+B)^t = A^t + B^t$ และ $(A-B)^t = A^t - B^t$
10. $(kA)^t = kA^t$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์
11. $(AB)^t = B^tA^t$

4. ดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ เขียน $\det(A)$ หรือ $|A|$ แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A โดย

1. ถ้า $A = [a_{11}]_{1\times1}$ แล้ว $\det(A) = a_{11}$
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 แล้ว $\det(A)$ หาได้จาก $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 แล้ว $\det(A)$ หาได้โดยวิธีต่อสองหลักแรก

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

5. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n\times n$ และมีเมทริกซ์ B มิติ $n\times n$ ซึ่ง $AB = BA = I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n\times n$ แล้วจะเรียก B ว่าอินเวอร์สการคูณของ A และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

1. ถ้า A ไม่มีอินเวอร์สการคูณ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น**เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)
   ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ แล้วจะเรียก A ว่าเป็น**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน** (nonsingular matrix)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์และ $k \neq 0$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

6. สมบัติที่สำคัญบางประการของดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$ และจะได้ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4. ถ้า A มีมิติ $n\times n$ และ k เป็นสเกลาร์แล้ว $\det(kA) = k^n \det(A)$
5. $\det(I) = 1$
6. $\det(A^n) = (\det(A))^n$ เมื่อ A^n คือผลคูณของเมทริกซ์ A ทั้งหมด n ตัว

7. ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์ และเมทริกซ์ผูกพัน

7.1 ไมเนอร์ (Minor)

ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$ ซึ่งเท่ากับดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ย่อยที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ทิ้งไป เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad M_{21}(A) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

7.2 โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$ นิยามโดย

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$$

ข้อสังเกต $(-1)^{i+j}$ เท่ากับ 1 เมื่อ $i+j$ เป็นเลขคู่ และเท่ากับ -1 เมื่อ $i+j$ เป็นเลขคี่

7.3 เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

เมทริกซ์ผูกพันของเมทริกซ์ A เขียนแทน $\operatorname{adj}(A)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนที่สมาชิกทุกตัวด้วยโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้นแล้วทรานสโพส กล่าวคือ $\operatorname{adj}(A) = \left[C_{ij}(A)\right]^t$

7.4 สมบัติที่สำคัญบางประการของโคแฟกเตอร์และเมทริกซ์ผูกพัน

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ ที่มีมิติ $n \times n$

1. $\det(A)$ หาได้จากการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่ง

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \text{ (กระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ } i\text{)}$$
$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \text{ (กระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ } j\text{)}$$

2. $A(\operatorname{adj}(A)) = \operatorname{adj}(A)A = \det(A)I$

3. ถ้า $\det(A) \neq 0$ นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$

กรณี $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = ad - bc \neq 0$ จะได้ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

4. $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$

8. ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปร $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$

ถ้า $m = n$ จ และ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้วจะหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

1. หา A^{-1} และหาคำตอบของระบบสมการจาก $X = A^{-1}B$
2. ใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการนำ B แทนลงในหลักที่ i ในเมทริกซ์ A

9. การดำเนินการตามแถว

1. สลับสองแถวใดๆ (เขียน R_{ij} แทนการสลับแถวที่ i กับแถวที่ j)
2. คูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ 0 (เขียน kR_i แทนการคูณแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว k)
3. บวกแถวใดแถวหนึ่งด้วยพหุคูณของอีกแถวหนึ่ง

(เขียน $R_i + kR_j$ แทนการบวกแถวที่ i ด้วย k เท่าของแถวที่ j)

การดำเนินการตามแถวมีประโยชน์ดังนี้

1. ช่วยในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยทำการดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมจนได้เมทริกซ์ลดรูปขั้นบันได วิธีการนี้ใช้ได้เสมอไม่ว่าจำนวนตัวแปรกับจำนวนสมการจะเท่ากันหรือไม่ก็ตาม

2. หาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์โดยทำการดำเนินการตามแถวกับ $\left[A \mid I\right]$ จนได้ $\left[I \mid A^{-1}\right]$

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow{\text{ดำเนินการตามแถว}} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) ของ A และ B คือ

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ข้อสังเกต โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$ แต่ $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A)\,n(B)$

2. ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์จาก A ไป B คือ สับเซตของ $A \times B$

ข้อสังเกต 1. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดแล้วจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B คือ $2^{n(A)\,n(B)}$

2. เซตว่าง (ϕ) เป็นความสัมพันธ์เสมอ

3. โดเมนและเรนจ์

โดเมน(domain) ของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = \{x \in A \mid \text{ มี } y \in B \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

เรนจ์(range) ของความสัมพันธ์ r คือ $R_r = \{y \in B \mid \text{ มี } x \in A \text{ ที่ทำให้ } (x,y) \in r\}$

ข้อสังเกต

1. เราอาจมองอย่างง่ายๆ ได้ว่า D_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งแรกของ r และ
   R_r ก็คือเซตของสมาชิกตำแหน่งหลังของ r
2. ในการหา D_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $y = f(x)$ แล้วพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
3. ในการหา R_r นั้น เราจะเขียนสมการในรูป $x = g(y)$ แล้วพิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

4. อินเวอร์สของความสัมพันธ์

ให้ r เป็นความสัมพันธ์ จะได้อินเวอร์สของ r คือ

$$r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\} = \{(x,y) \mid (y,x) \in r\}$$

ข้อสังเกต $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

5. ฟังก์ชัน

1. ความหมายของฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ทุกคู่ลำดับในความสัมพันธ์นั้นไม่มีสมาชิกตำแหน่งแรกซ้ำกัน และเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ($f: A \to B$) ก็ต่อเมื่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

2. ฟังก์ชันทั่วถึง

$f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ ก็ต่อเมื่อ $f: A \to B$ และ $R_f = B$

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$f : A \xrightarrow{1-1} B$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ข้อสังเกต ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้วอินเวอร์สของ f เป็นฟังก์ชันด้วย

6. ฟังก์ชันคอมโพสิท

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \phi$ ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g นิยามโดย

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } f(x) \in D_g$$

7. พีชคณิตของฟังก์ชัน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $D_f \cap D_g \neq \phi$ นิยาม

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$
4. $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

8. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

1. ถ้า $f(a) < f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันเพิ่ม**
2. ถ้า $f(a) > f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันลด**
3. ถ้า $f(a) \leq f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันไม่ลด**
4. ถ้า $f(a) \geq f(b)$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ ทุก a และ b ใน D_f แล้วจะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม**

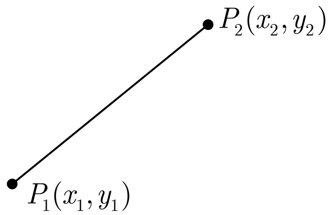
เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

1. เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

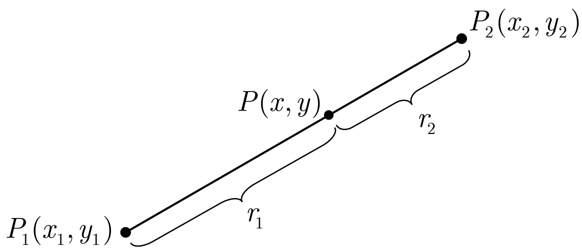
1. ระยะทางระหว่างจุด

กำหนดจุด $P_1(x_1,y_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2)$

จะได้ $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



2. การแบ่งส่วนของเส้นตรง

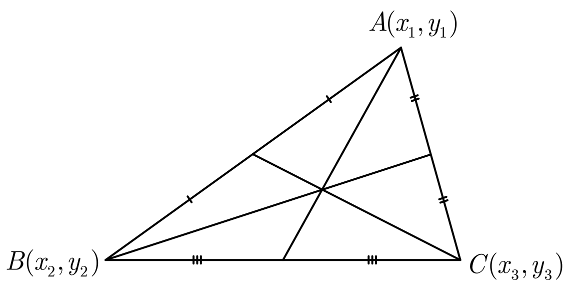


พิกัดของจุด P ซึ่งทำให้ $|P_1P|:|P_2P| = r_1 : r_2$ คือ $(\frac{r_2x_1+r_1x_2}{r_1+r_2}, \frac{r_2y_1+r_1y_2}{r_1+r_2})$

ในกรณีที่จุด P แบ่งครึ่ง P_1P_2 จะได้พิกัดของจุด P คือ $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

3. จุดมัธยฐานของสามเหลี่ยม

กำหนดสามเหลี่ยม ABC ดังรูป พิกัดของจุดมัธยฐานคือ $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$



2. เส้นตรง

1. ความชันของเส้นตรง

นิยามความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ และ $x_1 \neq x_2$ โดย

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1.1 ถ้าเส้นตรง L ทำมุม θ กับแกน x ด้านบวก และ $\theta \neq 90^\circ$ แล้ว $m = \tan\theta$

1.2 กำหนดให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับ จะได้

$L_1 // L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

และ $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

2. สมการเส้นตรง

2.1 เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m มีสมการเป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$

2.2 เส้นตรงที่ตัดแกน y ที่จุด $(0, c)$ และมีความชัน m มีสมการเป็น $y = mx + c$

2.3 สมการทั่วไปของเส้นตรงคือ $Ax + By + C = 0$ ซึ่งมีความชันเป็น $m = -\dfrac{A}{B}$

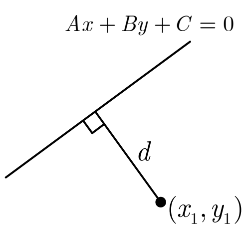
3. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และเส้นตรงกับเส้นตรง

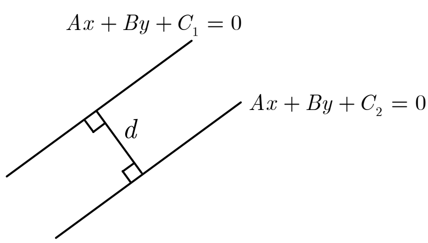
3.1 ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) กับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

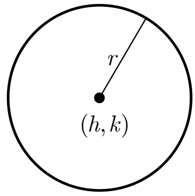
3.2 ระยะทางระหว่างเส้นขนาน $Ax + By + C_1 = 0$ กับ $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





3. วงกลม (Circle)



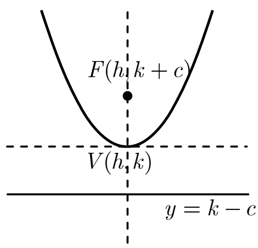
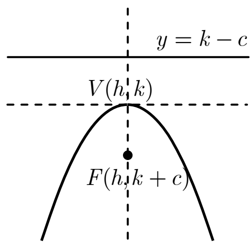
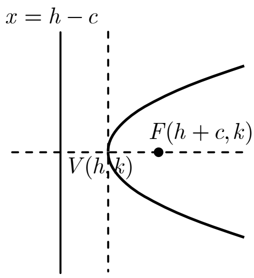
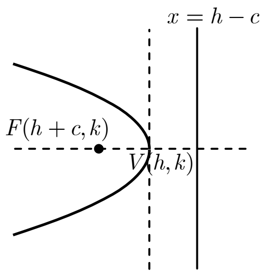
วงกลมคือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งห่างจาก
จุดคงที่จุดหนึ่ง(จุดศูนย์กลาง)เป็นระยะทางคงที่(รัศมี)เสมอ
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

4. พาราโบลา (Parabola)

พาราโบลาคือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง(ไดเรกทริกซ์)และจุดคงที่(โฟกัส)จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัส(จุด F) กับไดเรกทริกซ์ว่า **จุดยอด** (จุด V)

	$c>0$	$c<0$
$(x-h)^2=4c(y-k)$		
$(y-k)^2=4c(x-h)$		

ข้อสังเกต ความกว้างของพาราโบลาที่จุดโฟกัสเท่ากับ $|4c|$

5. วงรี (Ellipse)

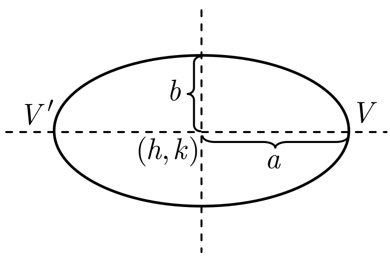
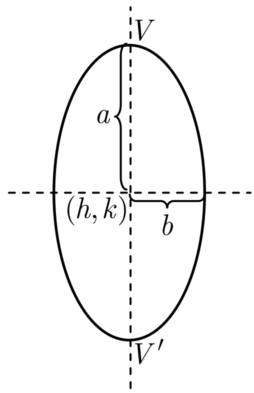
วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด(จุดโฟกัส) บนระนาบมีค่าคงที่

ถ้าให้ผลบวกคงที่นั้นเท่ากับ $2a$ และให้จุดโฟกัสห่างกัน $2c$ โดยที่ $a > c$

และกำหนดจำนวนจริงบวก b จากสมการ

$$a^2 = b^2 + c^2$$

จะได้สมการวงรีใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

<table>
<tr><td>$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
เมื่อ $a > b > 0$</td><td>$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
เมื่อ $a > b > 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

เรียกจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองว่า **จุดศูนย์กลาง** ซึ่งก็คือจุด (h,k) ในรูป

เรียกแกนที่ยาวว่า **แกนเอก**

เรียกแกนที่สั้นว่า **แกนโท**

เรียกจุดปลายทั้งสองของแกนเอกว่า **จุดยอด** ซึ่งก็คือจุด V และ V'

ความหมายของพารามิเตอร์ a, b, c มีดังนี้

ระยะครึ่งแกนเอก a บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดทั้งสอง (จุดปลายแกนเอก)

ระยะครึ่งแกนโท b บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดปลายทั้งสองของแกนโท

ระยะโฟกัส c บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง

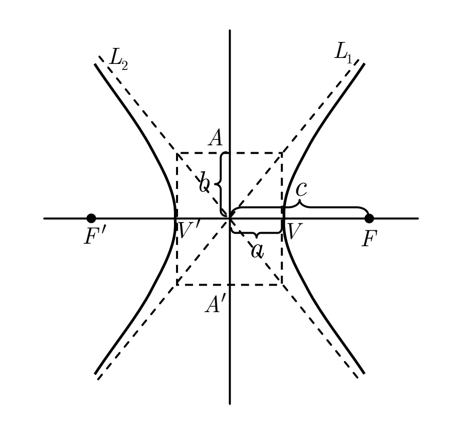
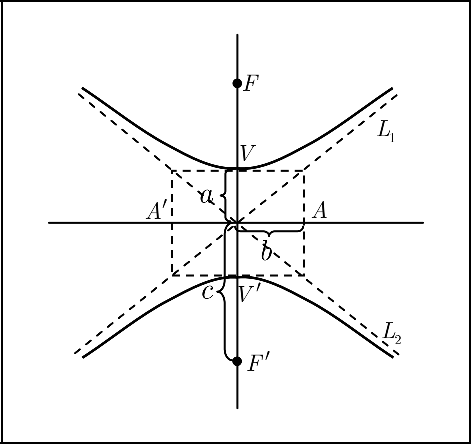
6. ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆในเซตนี้ไปยังจุดคงที่(จุดโฟกัส) สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว

ถ้าให้ผลต่างคงที่นั้นเท่ากับ $2a$ และให้จุดโฟกัสห่างกัน $2c$ โดยที่ $a < c$

และกำหนดจำนวนจริงบวก b จากสมการ $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาใน 2 รูปแบบต่อไปนี้

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
	

จุด V และ V' เรียกว่า **จุดยอด**

ส่วนของเส้นตรง VV' เรียกว่า **แกนตามขวาง** ส่วนของเส้นตรง AA' เรียกว่า **แกนสังยุค**

เส้นตรง L_1 และ L_2 เรียกว่า **เส้นกำกับไฮเพอร์โบลา**

ความหมายของพารามิเตอร์ a, b, c มีดังนี้

ค่า a บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดทั้งสอง(จุดปลายแกนตามขวาง)

ค่า b บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดปลายทั้งสองของแกนสังยุค

ค่า c บอกระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสทั้งสอง โดยจุดโฟกัสจะอยู่บนแกนตามขวางเสมอ

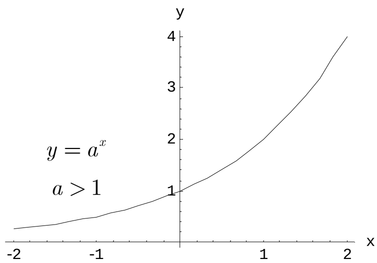
ถ้า $a = b$ แล้วจะเรียกไฮเพอร์โบลานั้นว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**

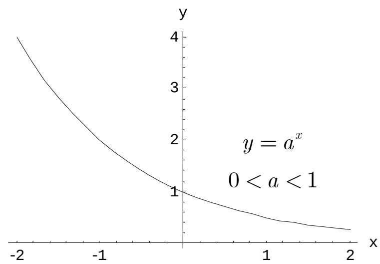
นอกจากนี้ยังมีไฮเพอร์มุมฉากในรูปพิเศษซึ่งมีสมการเป็น $xy = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่และ $k \neq 0$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$





ข้อสังเกต

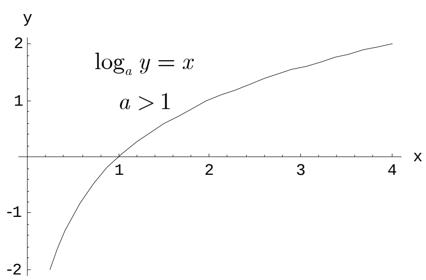
1. กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ
2. $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $D_{\exp} = \mathbb{R}$ และ $R_{\exp} = \mathbb{R}^+$
3. $a^x > 0$ เสมอ (เมื่อ $a > 0$)
4. ถ้า $a > 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 < x_2$
5. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว a^x จะเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $a^{x_1} < a^{x_2}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 > x_2$

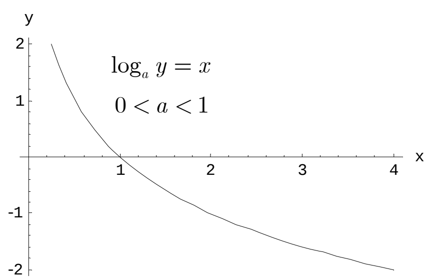
2. ฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

กำหนดฐาน a สอดคล้องกับ $0 < a < 1$ หรือ $a > 1$

$$y = a^x \text{ ก็ต่อเมื่อ } \log_a y = x$$





ข้อสังเกต

1. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึมผ่านจุด $(1,0)$ เสมอ
2. $\log_a : \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}$ นั่นคือ $D_{\log_a} = \mathbb{R}^+$ และ $R_{\log_a} = \mathbb{R}$
3. ถ้า $a > 1$ แล้ว $\log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 < x_2$
4. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\log_a x$ จะเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 > x_2$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการของฟังก์ชันลอการิทึม

1. $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$
2. $\log_a a^x = x$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^y = y \log_a x$
6. $\log_{a^p} x^y = \frac{y}{p} \log_a x$
7. $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$
8. $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$
9. $a^{\log_a x} = x$

4. ลอการิทึมฐานธรรมชาติ

e เป็นค่าคงตัวและเป็นอตรรกยะ โดย $e = 2.7182818\ldots$

ลอการิทึมฐาน e นิยมเขียนแทนด้วย $\ln x$ นั่นคือ $\ln x = \log_e x$

5. การถอดรากที่สองในรูป $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$

เนื่องจาก $\left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^2 = (x+y) \pm 2\sqrt{xy}$

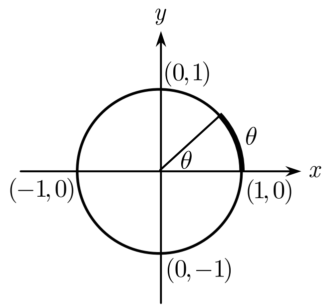
การหา $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ จึงทำได้โดยหา x และ y ซึ่ง $x + y = a$ และ $xy = b$ และจะได้

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{และ} \quad \sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \text{เมื่อ } x > y$$

ตัวอย่าง $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ และ $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

ตรีโกณมิติ

1. วงกลมหนึ่งหน่วยและการวัดมุม



วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลม $x^2 + y^2 = 1$

กำหนดให้มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย มีค่าเท่ากับ θ เรเดียน โดยให้มุมบวกเป็นมุมที่วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาเทียบกับแกน x ด้านบวกและให้มุมลบเป็นมุมที่วัดในทิศตามเข็มนาฬิกาเทียบกับแกน x ด้านบวก

1. มุม θ และมุม $\theta + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะมีจุดปลายเดียวกัน
2. ส่วนโค้งที่ยาว a ในวงกลมรัศมี r จะรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\theta = \frac{a}{r}$
3. π เรเดียน $= 180^\circ$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้าจุดปลายของมุม θ มีพิกัดเป็น (x, y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยแล้วจะนิยาม

$\cos\theta = x$

$\sin\theta = y$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{y}$ เมื่อ $y \neq 0$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$ เมื่อ $y \neq 0$

3. เอกลักษณ์พื้นฐาน

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\sin(n\pi - \theta) = (-1)^{n+1}\sin\theta$

$\cos(n\pi - \theta) = (-1)^n\cos\theta$

$\sin(\frac{2n+1}{2}\pi - \theta) = (-1)^n\cos\theta$

$\cos(\frac{2n+1}{2}\pi - \theta) = (-1)^n\sin\theta$

4. สูตรมุมประกอบ

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} \qquad \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

5. สูตรมุมสองเท่า

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \qquad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

6. สูตรมุมสามเท่า

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \qquad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

7. สูตรมุมครึ่งเท่า

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} \qquad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

8. สูตรแปลงระหว่างผลคูณกับผลบวกหรือผลต่าง

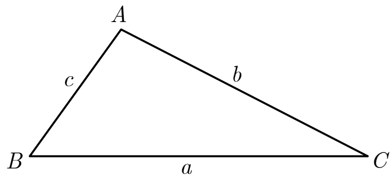
$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \qquad \sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \qquad \sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \qquad \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \qquad \cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

9. สูตรเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม



1. **กฎของไซน์** (Law of Sine)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม

2. **กฎของโคไซน์** (Law of Cosine)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

เมื่อกำหนดความยาวด้าน a, b, c สามารถใช้กฎของโคไซน์หา $\cos A, \cos B, \cos C$ ได้

3. **พื้นที่รูปสามเหลี่ยม**

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

10. รูปทั่วไปของมุมจากการแก้สมการตรีโกณมิติ

1. ถ้า $\sin\theta = \sin\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ หรือเขียนว่า $\theta = 2n\pi + \alpha, (2n+1)\pi - \alpha$

2. ถ้า $\cos\theta = \cos\alpha$ แล้ว $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

3. ถ้า $\tan\theta = \tan\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + \alpha$

11. อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. ถ้า $y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = x$ และ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. ถ้า $y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $\cos y = x$ และ $y \in [0, \pi]$
3. ถ้า $y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $\tan y = x$ และ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arcsin	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1,1]$	$[0, \pi]$
arctan	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ข้อสังเกต

1. $\sin(\arcsin x) = x$ เสมอ แต่ $\arcsin(\sin x)$ อาจไม่เท่ากับ x ต้องพิจารณาช่วงของ x ด้วย เช่น

$$\arcsin(\sin x) = x \text{ เมื่อ } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x \text{ เมื่อ } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

สำหรับ arccos และ arctan ก็พิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

2. $\begin{cases} \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \arcsin(-x) = -\arcsin x \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ \arctan(-x) = -\arctan x \end{cases}$

4. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$

เวกเตอร์

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์

สเกลาร์เป็นปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว

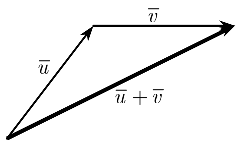
เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรที่ปลายหนึ่งเพื่อระบุทิศทางของเวกเตอร์และความยาวของส่วนของเส้นตรงนั้นระบุขนาดของเวกเตอร์

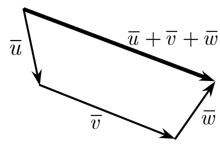
ขนาดของเวกเตอร์ $\overline{u}$ เขียนแทนด้วย $|\overline{u}|$

จะกล่าวว่า $\overline{u} = \overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ มีทิศทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน

เวกเตอร์ศูนย์ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น 0 เขียนแทนด้วย $\overline{0}$

2. การบวกและการลบเวกเตอร์

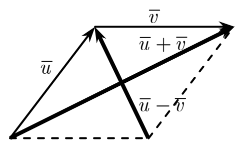




1. การบวกเวกเตอร์

ทำได้โดยการเขียนเวกเตอร์ต่อกันในลักษณะหางต่อหัว

2. การลบเวกเตอร์



ทำได้โดยการกลับทิศของเวกเตอร์ตัวลบก่อนจึงบวกเข้ากับเวกเตอร์ตัวตั้ง

ข้อสังเกต

1. $-\overline{v}$ เป็นนิเสธของ $\overline{v}$ กล่าวคือมีขนาดเท่ากับ $\overline{v}$ แต่มีทิศตรงข้าม
2. $\overline{u}+\overline{v}$ และ $\overline{u}-\overline{v}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นด้าน
3. เนื่องจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อด้านแต่ละด้านยาวเท่ากัน จึงได้ว่า $\overline{u}+\overline{v} \perp \overline{u}-\overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ $|\overline{u}| = |\overline{v}|$

3. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ k เป็นสเกลาร์และ $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ นิยาม $k\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น $|k|$ เท่าของ $\overline{u}$ และ

1. มีทิศเดียวกับ $\overline{u}$ ถ้า $k > 0$ 2. มีทิศตรงข้ามกับ $\overline{u}$ ถ้า $k < 0$

ข้อสังเกต 1. $-\overline{u} = (-1)\overline{u}$

2. ถ้า $\overline{u}, \overline{v} \neq \overline{0}$ และมีสเกลาร์ k ซึ่ง $\overline{u} = k\overline{v}$ แล้ว $\overline{u}$ ขนานกับ $\overline{v}$

4. สมบัติที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับเวกเตอร์

สำหรับเวกเตอร์ $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ ใดๆ และสเกลาร์ a, b ใดๆ

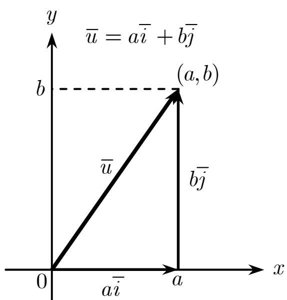
1. $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
2. $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$
3. $\overline{u}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{u}=\overline{u}$
4. $\overline{u}+(-\overline{u})=(-\overline{u})+\overline{u}=\overline{0}$
5. $a(b\overline{u})=(ab)\overline{u}$
6. $(a+b)\overline{u}=a\overline{u}+b\overline{u}$
7. $a(\overline{u}+\overline{v})=a\overline{u}+a\overline{v}$
8. ถ้า $\overline{u}, \overline{v} \neq \overline{0}$ และ $\overline{u}$ ไม่ขนานกับ $\overline{v}$ และ $a\overline{u}+b\overline{v}=\overline{0}$ แล้ว $a=0$ และ $b=0$

5. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ให้ $\overline{i}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน x และ $\overline{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของแกน y

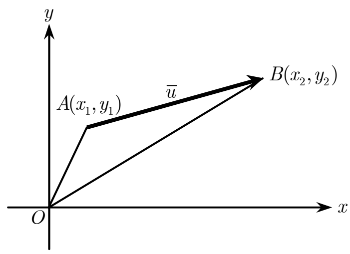
เวกเตอร์ $\overline{u}$ ที่เริ่มจากจุดกำเนิดไปสิ้นสุดที่จุด (a,b) คือ $\overline{u}=a\overline{i}+b\overline{j}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

และขนาดของเวกเตอร์ $\overline{u}$ คือ $|\overline{u}|=\left|a\overline{i}+b\overline{j}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$



เวกเตอร์ $\overline{u}$ ที่เริ่มจากจุด $A(x_1,y_1)$ ไปสิ้นสุดที่จุด $B(x_2,y_2)$ คือ

$$\overline{u}=\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=-\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{bmatrix}$$



6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่กำหนดให้

กำหนด $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$ ขนาดของ $\bar{u}$ คือ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศของ $\bar{u}$ คือ $\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \dfrac{a\bar{i} + b\bar{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = -\dfrac{a\bar{i} + b\bar{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้

กำหนด $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$ ขนาดของ $\bar{u}$ คือ $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ คือ $\pm\dfrac{b\bar{i} - a\bar{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

7. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product)

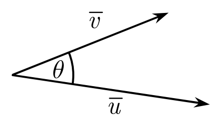
กำหนด $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

นิยามผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น $\bar{u} \cdot \bar{v} = ac + bd$

ข้อสังเกต

สำหรับเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ใดๆ

1. $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
2. $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
3. $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$
4. $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$



ถ้า $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ เราสามารถหามุมระหว่างเวกเตอร์ได้จาก

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

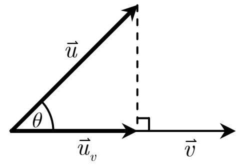
5. ถ้า $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว $\bar{u} \perp \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$
6. $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$
7. $\begin{cases} |\bar{u} + \bar{v}|^2 = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = |\bar{u}|^2 + 2(\bar{u} \cdot \bar{v}) + |\bar{v}|^2 \\ |\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = |\bar{u}|^2 - 2(\bar{u} \cdot \bar{v}) + |\bar{v}|^2 \end{cases}$

8. เงาฉาย (Projection)

ให้ $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ เงาฉายของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ คือเวกเตอร์ $\bar{u}_v$ ดังรูป

ซึ่งจะเห็นว่า $|\bar{u}_v| = |\bar{u}|\cos\theta = |\bar{u}|\left(\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}\right) = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|}$

ดังนั้น $\bar{u}_v = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|}\left(\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right) = \left(\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right)\bar{v}$



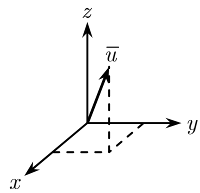
ในทำนองเดียวกัน เงาฉายของ $\bar{v}$ บน $\bar{u}$ คือ $\bar{v}_u = \left(\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|^2}\right)\bar{u}$

9. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ $|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|$

กำหนด $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศบวกของ

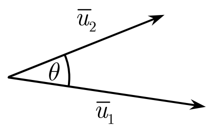
แกน x, y, z ตามลำดับ เวกเตอร์ $\bar{u}$ ที่เริ่มจากจุดกำเนิดไปสิ้นสุดที่จุด (a,b,c)

จะเขียนได้ในรูป $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$



10. ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนด $\bar{u}_1 = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$ และ $\vec{u}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ จะนิยาม

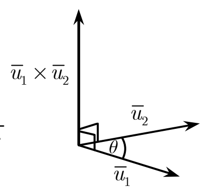


1. **ผลคูณเชิงสเกลาร์** (Scalar Product **หรือ** Dot Product)

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = |\bar{u}_1||\bar{u}_2|\cos\theta$$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}_1$ กับ $\bar{u}_2$

2. **ผลคูณเชิงเวกเตอร์** (Vector Product **หรือ** Cross Product)

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\bar{i} + (c_1a_2 - c_2a_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$



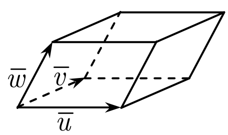
$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ จะมีทิศตามกฎมือขวาและ $|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2| = |\bar{u}_1||\bar{u}_2|\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}_1$ กับ $\bar{u}_2$

นอกจากนี้ $|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|$ **มีค่าเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}_1$ กับ $\bar{u}_2$ เป็นด้านประชิด**

11. ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

รูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน(parallelepiped)

ที่มีเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นด้านประชิดคือ $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})$



จำนวนเชิงซ้อน

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

1. จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนที่เขียนในรูป $a+bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i^2=-1$

เรียก a ว่า**ส่วนจริง**(real part) และเรียก b ว่า**ส่วนจินตภาพ**(imaginary part)

ถ้าให้ $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะกำหนด $\mathrm{Re}(z)=a$ และ $\mathrm{Im}(z)=b$

2. ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเขียน $|z|$ แทนขนาดของ z โดย $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

3. สังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเขียน $\overline{z}$ แทนสังยุคของ z โดย $\overline{z}=a-bi$

2. การดำเนินการและความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนด $z_1=a_1+b_1i$ และ $z_2=a_2+b_2i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

$z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=b_1$ และ $a_2=b_2$

2. การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ และ $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน

$z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$

แต่ $i^2=-1$ จึงได้ $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

ข้อสังเกต 1. $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-i,\ \ldots$

2. $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=i^2=-1,\ i^{4n+3}=i^3=-i$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

3. ถ้า $z=a+bi$ แล้ว $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=|z|^2$

4. การหารจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_2 \neq 0$ แล้ว $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

นั่นคือ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \dfrac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \dfrac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$

ข้อสังเกต $\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$

3. สมบัติที่สำคัญบางประการ

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, z_1, z_2 ใดๆ

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ และ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ และ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ และ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
6. $|-z| = |z|$
7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ และ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
8. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $z \neq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มลบ
9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
10. $\begin{cases} |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1^2| + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2^2| \\ |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1^2| - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2^2| \end{cases}$

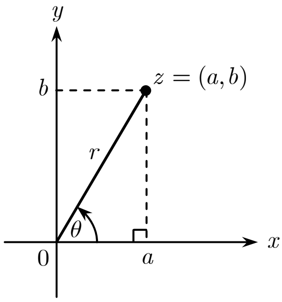
ตัวอย่าง กำหนด $z_1 = 4 - 3i$ และ $z_2 = 1 + i$ จงหา $\left|\dfrac{\overline{z_1}^6 i^{17}}{625\overline{z_2}^5}\right|$

วิธีทำ จะเห็นว่า $|z_1| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ และ $|z_2| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

นอกจากนี้ $|i| = 1$ ดังนั้น

$$\left|\frac{\overline{z_1}^6 i^{17}}{625\overline{z_2}^5}\right| = \frac{|\overline{z_1}^6||i^{17}|}{|625||\overline{z_2}^5|} = \frac{|\overline{z_1}|^6 |i|^{17}}{625|\overline{z_2}|^5} = \frac{|z_1|^6 |i|^{17}}{625|z_2|^5} = \frac{5^6 \cdot 1^{17}}{625(\sqrt{2})^5} = \frac{25}{4\sqrt{2}}$$

4. จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว



$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\theta=\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \end{cases}$$

จำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ แทนได้ด้วยจุด (a,b) ในระบบพิกัดฉาก

เรียกแกน x ว่าแกนจริง และเรียกแกน y ว่าแกนจินตภาพ

เรียก r ว่า**มอดุลัส**(modulus) และเรียก θ ว่า**อาร์กิวเมนท์**(argument) ของ z

จะเห็นว่า $z=a+bi=r\cos\theta+r\sin\theta\, i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

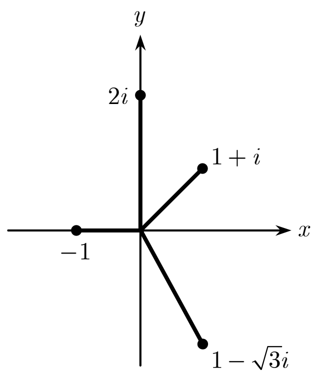
เรียกจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูป $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เมื่อ $r\geq 0$ ว่า **รูปเชิงขั้ว**

ข้อสังเกต 1. $|\cos\theta+i\sin\theta|=1$ และ $|r(\cos\theta+i\sin\theta)|=r$

2. $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

ตัวอย่าง

1. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
2. $1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
3. $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
4. $-1=1(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$



ข้อสังเกต

1. รูปเชิงขั้วของ z มีได้มากมาย เช่น $i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)$ เมื่อ $k\in \mathrm{I}$
2. การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วทำให้การคูณ หาร และยกกำลังทำได้ง่ายขึ้น เช่น

$$(1+i)^{13}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{13}=64\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}\right)=-64-64i$$

$$(1+\sqrt{3}i)^{5}=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{5}=32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=16-16\sqrt{3}i$$

5. การคูณ การหาร และการยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

6. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{เมื่อ } k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

ข้อสังเกต รากทั้ง n ตัวมีขนาดเท่ากันหมด และมีอาร์กิวเมนต์ห่าง $\frac{2\pi}{n}$ เท่าๆ กัน

ตัวอย่าง จงหารากที่ 4 ของ $16i$

วิธีทำ เนื่องจาก $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ดังนั้นรากที่เห็นได้ง่ายที่สุดคือ $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

ส่วนรากที่เหลืออีก 3 ตัว หาได้โดยการเพิ่มอาร์กิวเมนต์ของรากตัวแรกไปครั้งละ $\frac{2\pi}{4}$

ซึ่งจะได้รากที่เหลือเป็น $2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right), 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right), 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$

7. รากของสมการพหุนาม

พิจารณาสมการพหุนาม $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n \neq 0$

1. สมการนี้มีราก n ราก (นับรากที่ซ้ำกันด้วย)

2. ในกรณีที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง และถ้า z_1 เป็นรากแล้ว $\overline{z_1}$ จะเป็นรากด้วย

3. ถ้า $z_1, z_2, \ldots, z_n$ เป็นรากทั้ง n ตัว (อาจซ้ำกันได้) แล้ว

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{และ} \quad z_1z_2\cdots z_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

ในกรณีของสมการกำลังสอง $az^2 + bz + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

และ z_1, z_2 เป็นรากทั้งสองแล้วจะได้ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ และ $z_1z_2 = \frac{c}{a}$

กำหนดการเชิงเส้น

1. ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming Problem)

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นเป็นการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนดให้ ข้อจำกัดมักจะอยู่ในรูปของระบบอสมการเชิงเส้น

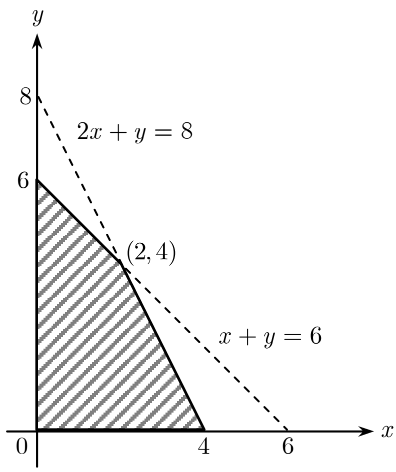
2. ขั้นตอนการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

1. หาฟังก์ชันจุดประสงค์และข้อจำกัดทั้งหมดของปัญหา
2. เขียน**อาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้** (feasible region) และหาพิกัดของจุดมุมทุกจุด
3. หาค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุดมุมทุกจุด แล้วเลือกจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามต้องการ

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $P = 5x + 4y$ ภายใต้ข้อจำกัด

$$2x + y \le 8,\ x + y \le 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

วิธีทำ เขียนบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้



ได้จุดมุม 4 จุดคือ $(0,0), (0,6), (2,4), (4,0)$ ซึ่งแทนในฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ดังนี้

$$P(0,0) = 0,\ P(0,6) = 24,\ P(2,4) = 26,\ P(4,0) = 20$$

ดังนั้น P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 26 เมื่อ $x = 2, y = 4$ และ P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 เมื่อ $x = 0, y = 0$

การนับและความน่าจะเป็น

1. กฎการนับเบื้องต้น

1. กฎการคูณ

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k ขั้นตอนย่อย ที่ทำได้ $n_1, n_2, \dots, n_k$ วิธี ตามลำดับ
จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ วิธี

2. กฎการบวก

การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งเป็น k กรณีย่อยที่ไม่ซ้ำกัน ที่ทำได้ $n_1, n_2, \dots, n_k$ วิธี ตามลำดับ
จะมีจำนวนวิธีที่จะทำงานนั้นทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

2. แฟกทอเรียล (Factorial)

$0! = 1$ และ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ เมื่อ $n \ge 1$

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง

1. ของ n สิ่งที่ต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ $n!$ วิธี

2. ของ n สิ่งที่ต่างกัน นำมาทีละ k สิ่งมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ ${}^{n}P_{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ วิธี

3. การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำเป็นเส้นตรง
ถ้าของ n สิ่งแบ่งได้ k กลุ่มดังนี้ ที่มีของเหมือนกัน $n_1, n_2, \dots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ
แล้วจะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงได้ $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$ วิธี

ข้อสังเกต ${}^{n}P_{n} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ และ ${}^{n}P_{0} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

สิ่งของ n สิ่งที่ต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ $(n-1)!$ วิธี

ถ้าจัดเป็นวงกลมที่มองได้สองด้าน เช่น การร้อยมาลัย จะทำได้ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ วิธี

4. วิธีจัดหมู่

มีของ n สิ่งที่ต่างกัน เลือกมาทีละ k สิ่งโดยไม่สนใจลำดับ จำนวนวิธีที่ทำได้คือ

$$^{n}C_{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ข้อสังเกต

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 4. $^{n}P_{k} = \binom{n}{k}k!$

5. การแบ่งกลุ่มของที่ต่างกัน

มีของ n สิ่งที่ต่างกัน ต้องการแบ่งเป็น k กลุ่มต่างกัน ที่มี $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ

จะแบ่งกลุ่มได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ วิธี

6. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ข้อสังเกต

1. ในการกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ $n+1$ พจน์
2. พจน์ที่ $k+1$ คือ $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
3. สัมประสิทธิ์ของการกระจายทวินามจัดเป็นสามเหลี่ยมของปาสคาลได้

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}$$

4. **เอกลักษณ์ของปาสคาล**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. ถ้าแทน $a = b = 1$ จะได้

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

6. ถ้าแทน $a = 1, b = -1$ จะได้

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

7. ความน่าจะเป็น

1. การทดลองสุ่ม คือการทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกผลการทดลองในแต่ละครั้งได้อย่างถูกต้องแน่นอน

2. แซมเปิลสเปซ (sample space) คือเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

3. เหตุการณ์ (event) คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

ถ้า S เป็นเซมเปิลสเปซซึ่งประกอบด้วย**สมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน**

แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}$

ข้อสังเกต

1. $0 \le P(E) \le 1$ สำหรับเหตุการณ์ E ใดๆ

2. $P(\phi)=0$ และ $P(S)=1$

3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ในกรณีที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกันแล้ว $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

เหตุการณ์จะเป็นอิสระต่อกัน เมื่อการเกิดของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลกระทบถึงการเกิดของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

5. ถ้า A' เป็นคอมพลีเมนต์ของ A จะได้

$$\boxed{P(A')=1-P(A)}$$

8. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อมีเงื่อนไขว่าเหตุการณ์ B เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข** เขียนแทนด้วย $P(A\mid B)$ และ

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ข้อสังเกต

1. $P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)=P(A)P(B\mid A)$

2. ถ้า A และ B อิสระต่อกันแล้ว $P(A\mid B)=P(A)$ และ $P(B\mid A)=P(B)$

ซึ่งจะได้ตามมาว่า $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

ลำดับและอนุกรม

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ

ลำดับเป็นชุดของตัวเลขที่เขียนเรียงต่อกันอย่างมีลำดับ ซึ่งอาจมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัดหรืออาจมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ก็ได้

ลำดับจำกัดที่มี n พจน์จะอยู่ในรูป $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ลำดับอนันต์จะอยู่ในรูป $a_1, a_2, a_3, \dots$

2. อนุกรม

ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับหนึ่ง ลำดับของผลบวกย่อย n พจน์แรกของลำดับ a_n คือ

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

อนุกรมอนันต์ของลำดับอนันต์ a_n คือ $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ เมื่อผลบวกมีค่า

ข้อสังเกต $a_n = S_n - S_{n-1}$

3. ลำดับเลขคณิตและอนุกรมเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือลำดับซึ่ง $a_{n+1} - a_n$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $d = a_{n+1} - a_n$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **ผลต่างร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

ตัวอย่าง ให้ $-3, 1, 5, 9, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต จงหาพจน์ที่ n และผลบวก n พจน์แรก

วิธีทำ ผลต่างร่วม $d = 1 - (-3) = 4$ ดังนั้น $a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)(4) = 4n - 7$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(-3) + (n-1)4] = n(2n-5)$

4. ลำดับเรขาคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับซึ่ง $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นค่าคงตัว สำหรับทุกจำนวนนับ n

เรียก $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **อัตราส่วนร่วม**

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

ผลบวก n พจน์แรกคือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

ในกรณีที่ $|r| < 1$ จะหาผลบวกอนันต์ได้เป็น $S = \frac{a}{1-r}$

2. ลิมิตของลำดับ

1. ความหมายของลิมิต

ถ้า a_n มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว A ในขณะที่ n มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ อย่างไม่มีขอบเขต
จะกล่าวว่าลิมิตของ a_n เมื่อ $n \to \infty$ เท่ากับ A และเขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

ตัวอย่าง

1. $a_n = \frac{n}{n+1}$ ซึ่งก็คือ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
2. $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ซึ่งก็คือ $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

2. ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

ให้ a_n เป็นลำดับ

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่า จะเรียก a_n ว่าเป็น**ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence)
มิฉะนั้นจะเรียก a_n ว่าเป็น**ลำดับลู่ออก** (divergent sequence)

ตัวอย่าง

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $n \to \infty$ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ จึงเป็นลำดับลู่เข้า
2. $a_n = (-1)^n$ ซึ่งก็คือ $-1, 1, -1, 1, \ldots$ ซึ่งไม่ได้เข้าใกล้ค่าใด จึงไม่มีลิมิต และเป็นลำดับลู่ออก

ข้อสังเกต ถ้าลิมิตมีค่า แล้วลิมิตจะต้องเป็นค่าคงตัวและมีค่าเดียวเท่านั้น

3. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ แล้ว

1. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ และ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$ และ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$
4. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|$
5. $\lim_{n\to\infty} a_n^c = A^c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
6. $\lim_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
7. $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |r| < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } r = 1 \end{cases}$ และ $\lim_{n\to\infty} r^n$ ไม่มีค่า เมื่อ $r = -1$ หรือ $|r| > 1$
8. $\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } p < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0 \end{cases}$ และ $\lim_{n\to\infty} n^p$ ไม่มีค่า เมื่อ $p > 0$
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{เมื่อ } p = q \\ 0 & \text{เมื่อ } p < q \end{cases}$ และไม่มีลิมิตเมื่อ $p > q$

4. อนุกรมลู่เข้าและอนุกรมลู่ออก

ให้ S_n เป็นลำดับของผลบวกย่อย n พจน์แรกของลำดับ a_n

ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่า จะเรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ว่า **อนุกรมลู่เข้า** (convergent series)

มิฉะนั้นจะเรียกว่า **อนุกรมลู่ออก** (divergent series)

ข้อสังเกต

1. อนุกรมเลขคณิตเป็นอนุกรมลู่ออกเสมอ

ยกเว้นเมื่อ $a_1 = d = 0$ ซึ่งจะได้อนุกรม $0 + 0 + \cdots$

2. อนุกรมเรขาคณิตจะเป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|r| < 1$

   และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$ ทั้งนี้เมื่อ $a_1 \neq 0$

3. ความสัมพันธ์ระหว่างการลู่เข้าและลู่ออกของลำดับและอนุกรม

กรณีที่**สรุปผลได้แน่นอน**มีสองกรณี คือ

3.1 ถ้าอนุกรมลู่เข้าแล้วลำดับต้องลู่เข้าสู่ 0 เสมอ

นั่นคือถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ มีค่า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.2 ถ้าลำดับลู่ออกแล้ว อนุกรมต้องลู่ออกเสมอ

กรณีที่**สรุปผลไม่ได้**มีสองกรณี คือ

3.3 ถ้าอนุกรมลู่ออกแล้ว ลำดับอาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

3.4 ถ้าลำดับลู่เข้าแล้ว อนุกรมอาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

3. เครื่องหมายรวมยอด (Summation)

ให้ a_n เป็นลำดับ กำหนด $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

1. สมบัติบางประการของเครื่องหมายรวมยอด

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}(ca_i) = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

2. ผลรวมที่ควรทราบ

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

แคลคูลัส

1. ลิมิตและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

1. ลิมิตสองด้าน

เขียน $\lim_{x\to a} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a"

ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ มีค่าแล้ว

1. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ และ
$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. ถ้า $f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันพหุนาม**แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
6. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ เมื่อการหารากมีความหมาย

2. ลิมิตด้านเดียว

เขียน $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a **จากทางซ้าย**"

เขียน $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ แทน " $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ a **จากทางขวา**"

ทฤษฎีบทสำหรับลิมิตสองด้านยังคงใช้ได้กับลิมิตด้านเดียว

ถ้า $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = L$

2. ความต่อเนื่อง

ฟังก์ชัน f จะมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ มีค่า และ
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

กำหนด $y = f(x)$

ถ้า x เปลี่ยนไปเป็น $x+h$ แล้วการเปลี่ยนแปลงของ x คือ $\Delta x = (x+h) - x = h$

และการเปลี่ยนแปลงของ y คือ $\Delta y = f(x+h) - f(x)$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ คือ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4. อนุพันธ์

กำหนด $y = f(x)$ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

เขียนแทนด้วย $\dfrac{dy}{dx}, y', f'(x), \dfrac{df(x)}{dx}$ โดยที่

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

เราอาศัยสูตรต่อไปนี้ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

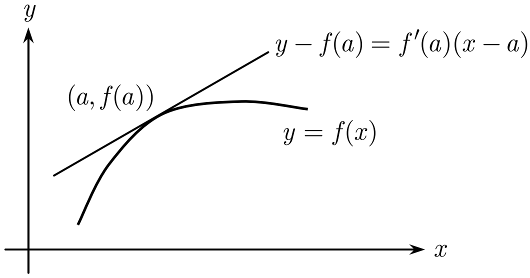
1. $\dfrac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
3. $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x

4. $\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
6. **สูตรผลคูณ** $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. **สูตรผลหาร** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
8. **กฎลูกโซ่** ถ้า z เป็นฟังก์ชันของ y และ y เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

5. ความชันและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

กำหนดเส้นโค้ง $y = f(x)$ ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดใดก็คืออนุพันธ์ที่จุดนั้น



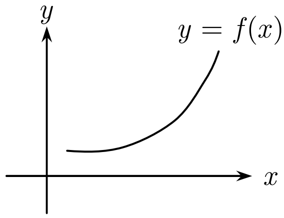
6. อนุพันธ์อันดับสูง

กำหนด $y = f(x)$ เราเรียก $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

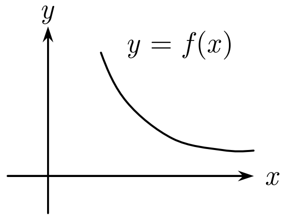
เรียก $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ ว่าเป็นอนุพันธ์อันดับสอง

และสามารถหาอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ได้ในทำนองเดียวกัน

7. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



ฟังก์ชันเพิ่ม



ฟังก์ชันลด

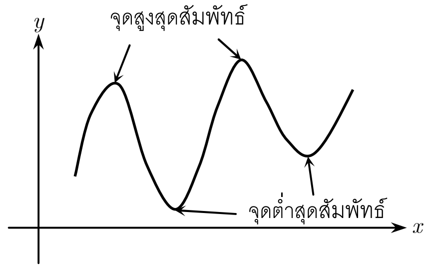
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[a,b]$ และสำหรับทุก $x_1, x_2 \in [a,b]$

1. ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ ทุก $x_1 < x_2$ แล้วจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บนช่วง $[a,b]$
2. ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ ทุก $x_1 < x_2$ แล้วจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง $[a,b]$

ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้ที่ทุกจุดในช่วง (a,b) แล้วจะตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดได้ดังนี้

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a,b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a,b]$

8. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



เมื่อกำหนด $y = f(x)$ หาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

1. หาอนุพันธ์ $f'(x)$

2. แก้สมการ $f'(x) = 0$ คำตอบที่ได้เรียกว่า**จุดวิกฤต** (จุดที่หา $f'(x)$ ไม่ได้เป็นจุดวิกฤตด้วย)

3. จุดวิกฤตแต่ละจุดอาจเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือไม่ใช่ทั้งสองอย่าง ซึ่งสามารถทดสอบจุดวิกฤต $x = x_0$ ได้ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้

3.1 **วิธีอนุพันธ์อันดับสอง**

- ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว x_0 จะให้จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว x_0 จะให้จุดสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f''(x_0) = 0$ แล้วยังสรุปไม่ได้ ต้องทดสอบโดยวิธีอื่น

3.2 **วิธีอนุพันธ์อันดับหนึ่ง**

พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$ ที่จุด x_0 ขณะ x มีค่าเพิ่มขึ้นจากทางซ้ายของ x_0 ไปทางขวาของ x_0

- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ (เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่มไปเป็นฟังก์ชันลด) จะได้จุดสูงสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก (เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดไปเป็นฟังก์ชันเพิ่ม) จะได้จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
- ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย แสดงว่าไม่ใช่จุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

9. ปฏิยานุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

แล้วจะเรียก $F(x)$ ว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และเขียนแทนด้วย $F(x) = \int f(x)\,dx$

ข้อสังเกต ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

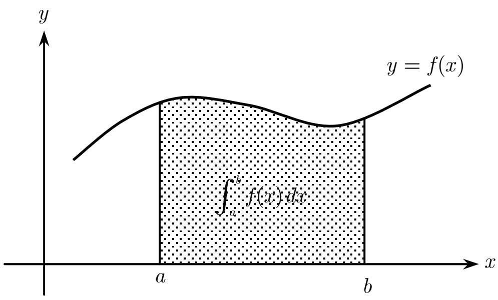
เราอาศัยสูตรต่อไปนี้ช่วยในการหาปฏิยานุพันธ์

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
3. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว
4. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

10. อินทิกรัลจำกัดเขตและพื้นที่ใต้กราฟ

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$



1. ถ้า $\int_a^b |f(x)|\,dx$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx$ จะมีความหมายเป็นพื้นที่ใต้กราฟของ $y = f(x)$ ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$

2. ถ้า $f(x) \le 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้ว $\int_a^b |f(x)|\,dx$ จะมีความหมายเป็นพื้นที่ระหว่างกราฟ $y = f(x)$ กับแกน x ในช่วง $x = a$ ถึง $x = b$

สถิติ

1. การวัดค่ากลางของข้อมูล

ค่ากลาง	สูตร	ข้อสังเกต
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean, A.M, $\overline{x}$, μ)	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$ 2. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$ น้อยที่สุดเมื่อ $a = \overline{x}$ 4. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\overline{y} = a\overline{x} + b$ 5. $x_{\min} \le \overline{x} \le x_{\max}$
มัธยฐาน (median, Me)	$Me =$ ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลางเมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว	$a = Me$ ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - a \rvert$ น้อยที่สุด
ฐานนิยม (mode, Mo)	$Mo =$ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด	1. ในกรณีที่มีข้อมูลมีการแจกแจงความถี่ อันตรภาคชั้นของทุกชั้นต้องเท่ากัน 2. ข้อมูลคุณภาพนิยมหาค่ากลางโดยวิธีนี้
ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean, G.M.)	$G.M. = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$	1. $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ ต้องหาค่าได้ 2. $\log G.M. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$ เมื่อ $x_i > 0$
ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean) หรือ $H.M.$	$H.M. = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$	$H.M. =$ ส่วนกลับของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่เป็นส่วนกลับของข้อมูลเดิมแต่ละตัว
กึ่งกลางพิสัย (mid-range)	$M.R. = \dfrac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$	ถ้าข้อมูลอยู่ในรูปอันตรภาคชั้นเปิด จะหาค่ากลางแบบนี้ไม่ได้

ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงความถี่ ให้ถ่วงน้ำหนักด้วยความถี่ของข้อมูลแต่ละตัวตามความเหมาะสม

ยกเว้นมัธยฐานที่ให้คำนวณตามสูตร $Mo = L + \left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right) I$

เมื่อ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด I = ความกว้างของชั้นที่มีความถี่สูงสุด

d_1 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าหนึ่งชั้น

d_2 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของชั้นที่สูงกว่าหนึ่งชั้น

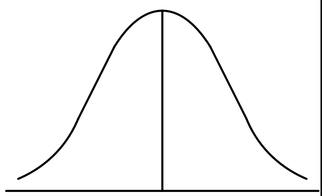
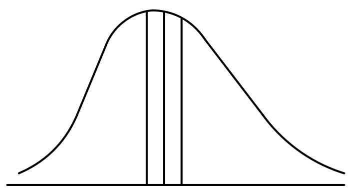
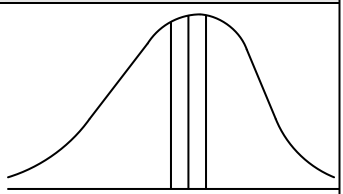
ข้อสังเกต ถ้าข้อมูลทุกตัวมีค่าบวกแล้ว $\overline{x} \geq G.M. \geq H.M.$

2. ข้อสังเกตเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม

1. ถ้าในจำนวนข้อมูลทั้งหมดมีข้อมูลบางค่าที่มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลอื่นๆ มาก จะมีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต กล่าวคืออาจจะทำให้ค่ากลางที่ได้มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลที่มีอยู่ส่วนใหญ่ แต่จะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อการหาค่ากลางโดยใช้มัธยฐานหรือฐานนิยม

2. ในกรณีที่ข้อมูลเป็นประเภทข้อมูลคุณภาพ (qualitative data) จะสามารถหาค่ากลางได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น แต่ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือมัธยฐานได้

3. ความสัมพันธ์ของ $\overline{x}$, Me, Mo

โค้งปกติ	โค้งเบ้ขวา	โค้งเบ้ซ้าย
 $\overline{x} = Me = Mo$	 $Mo < Me < \overline{x}$	 $\overline{x} < Me < Mo$

3. ควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์

ให้ L = ขีดจำกัดล่างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่ I = ความกว้างของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

$\sum f_L$ = เป็นความถี่สะสมก่อนชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่ f_i = ความถี่ของชั้นที่ค่าสถิตินั้นอยู่

ค่าสถิติ	ความหมาย	ข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่	ข้อมูลที่แจกแจงความถี่
มัธยฐาน (Median)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{n+1}{2}$	ตำแหน่งของ Me คือ $\frac{n}{2}$ $Me = L + I\left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_L}{f_i}\right)$

ควอร์ไทล์ (Quartile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{(n+1)k}{4}$	ตำแหน่งของ Q_k คือ $\frac{kn}{4}$ $Q_k = L + I\left(\frac{\frac{kn}{4} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เดไซล์ (Decile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{(n+1)k}{10}$	ตำแหน่งของ D_k คือ $\frac{kn}{10}$ $D_k = L + I\left(\frac{\frac{kn}{10} - \sum f_L}{f_i}\right)$
เปอร์เซ็นไทล์ (Percentile)	จุดที่แบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{(n+1)k}{100}$	ตำแหน่งของ P_k คือ $\frac{kn}{100}$ $P_k = L + I\left(\frac{\frac{kn}{100} - \sum f_L}{f_i}\right)$

4. การวัดการกระจายของข้อมูล

1. การวัดการกระจายสัมบูรณ์

1. พิสัย Range $= x_{\max} - x_{\min}$
2. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $M.D. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu|$
4. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$

ข้อสังเกต 1. ความแปรปรวน (Variance) $= \sigma^2$

2. ถ้ามีข้อมูล m ชุด และ $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m$ แล้ว

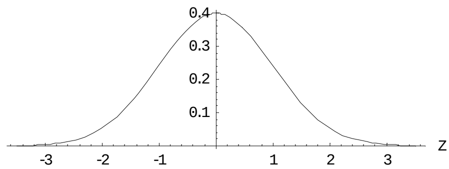
$$\sigma^2_{\text{รวม}} = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \cdots + n_m\sigma_m^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$$

3. ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\mu_y = a\mu_x + b$ และ $\sigma_y = |a|\sigma_x$

2. การวัดการกระจายสัมพัทธ์

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$
2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{M.D.}{\mu}$
4. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \dfrac{\sigma}{\mu}$

5. ค่ามาตรฐานและการแจกแจกปกติ



ค่ามาตรฐาน (z-score) กำหนดโดย $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

ข้อสังเกต 1. ค่าเฉลี่ยของ z เท่ากับ 0 เสมอ
2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ z เท่ากับ 1 เสมอ

ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงปกติ แล้ว z จะมีการกระจายเป็นโค้งระฆังคว่ำ ซึ่งมีสมมาตรเทียบกับ $z = 0$

6. การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. เส้นตรง $y = mx + c$ สมการปกติคือ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i + nc \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$ สังเกตว่า $\overline{y} = m\overline{x} + c$

2. พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ สมการปกติคือ
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

3. $y = ab^x$ หรือ $\log y = \log a + x\log b$ สมการปกติคือ
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \log y_i = n\log a + (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i = (\log a)\sum_{i=1}^{n} x_i + (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

ตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ (A-NET)

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบปรนัย ข้อ 1-25 ข้อละ 3 คะแนน

1. ให้ a เป็นจำนวนคู่บวก และ b เป็นจำนวนคี่บวก ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
   2. $a+b$ เป็นจำนวนเฉพาะ
   3. ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ ห.ร.ม. ของ a และ $2b$
   4. ค.ร.น. ของ a และ b เท่ากับ ค.ร.น. ของ a และ $2b$

2. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่ต่างกัน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^y = y^x$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $y^{\left(\frac{x}{y}\right)} = x$ 2. $x^{\left(\frac{y}{x}\right)} = y$ 3. $(xy)^y = x^{(x+y)}$ 4. $\left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{(x-y)}$

3. ในการกระจาย $\left(2^{\left(\frac{1}{5}\right)} + 3^{\left(\frac{1}{10}\right)}\right)^{55}$ จำนวนพจน์ที่เป็นจำนวนเต็มเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 5 พจน์ 2. 6 พจน์ 3. 7 พจน์ 4. 8 พจน์

4. ถ้า x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$x + 2y - 2z = -2$$
$$2x + y + 2z = 5$$
$$x - 3y - 2z = 3$$

   แล้ว ดีเทอร์มิแนนต์ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ x+2y & 2x+y & x-3y \end{vmatrix}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 60 2. 75 3. 90 4. 105

5. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรีที่มีสมการเป็น

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$$

   ถ้าวงกลมวงนี้สัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,3)$ และ $(5,0)$

   แล้ว รัศมีของวงกลมวงนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{4}{5}$ 3. $\frac{7}{8}$ 4. $\frac{9}{13}$

6. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
ถ้าจุด $A(6,k)$ เมื่อ $k > 0$ เป็นจุดอยู่บนเส้นกำกับของ H และ F_1, F_2 เป็นโฟกัสของ H
แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม AF_1F_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{37}{2}$ ตารางหน่วย 2. $\frac{45}{2}$ ตารางหน่วย 3. 30 ตารางหน่วย 4. 40 ตารางหน่วย

7. $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4. $\frac{1}{2}$

8. ถ้า $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = 1$ แล้ว $\sin 2\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2(1-\sqrt{2})$ 2. $2(\sqrt{2}-1)$ 3. $1-\sqrt{3}$ 4. $\sqrt{3}-1$

9. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์คือ $U = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u>

1. $\exists x\forall y[x + y < y]$ 2. $\exists x\forall y[x - y^2 < x]$
3. $\exists x\forall y[xy^2 = x]$ 4. $\exists x\forall y[x^2y = y]$

10. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์ $p \to (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $p \vee (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u>

1. $\sim q \vee (p \to r)$ 2. $\sim p \to (\sim p \vee q)$
3. $(q \vee r) \to \sim p \vee (q \wedge r)$ 4. $[(\sim q) \vee (\sim r)] \to [p \wedge (q \vee r)]$

11. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\log_7 3 < \log_5 3 < \log_7 10$ 2. $\log_5 3 < \log_7 3 < \log_7 10$
3. $\log_7 3 < \log_7 10 < \log_5 3$ 4. $\log_7 10 < \log_5 3 < \log_7 3$

12. <u>จำนวนเต็ม</u> ที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(x+1)] > -1$ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 7 3. 8 4. มากกว่า 8

13. กำหนดให้ $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{v} = 2\bar{j} + x\bar{k}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ $w = -3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$
ถ้า $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -12 2. -8 3. 8 4. 16

14. จำนวนเชิงซ้อน $z = 1 + i$ เป็นคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $z^4 - 2z^2 + 4z = 0$
2. $z^4 - 2z^2 - 4z = 0$
3. $z^4 + 2z^2 - 4z = 0$
4. $z^4 + 2z^2 + 4z = 0$

15. กราฟของจุด z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $(z+i)(\overline{z} - i) = 1$ เป็นรูปใดต่อไปนี้

1. เส้นตรง 2. วงกลม 3. วงรี 4. ไฮเพอร์โบลา

16. พิจารณาลำดับ a_n และ b_n ซึ่ง

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{2n+1} & \text{เมื่อ } n \le 100 \\ 2 & \text{เมื่อ } n > 100 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \le 100 \\ \dfrac{n^2}{2n+1} & \text{เมื่อ } n > 100 \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. a_n และ b_n เป็นลำดับลู่เข้า
2. a_n และ b_n เป็นลำดับลู่ออก
3. a_n เป็นลำดับลู่เข้า และ b_n เป็นลำดับลู่ออก
4. a_n เป็นลำดับลู่ออก และ b_n เป็นลำดับลู่เข้า

17. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ 3x & \text{เมื่อ } x \ge 1 \end{cases}$

ค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to 0^-} f(1-x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

18. ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมี $1, 2, 3$ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ และ $P(4) = 5$ แล้ว $P'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{6}{7}$ 2. $-\dfrac{5}{6}$ 3. $\dfrac{4}{5}$ 4. $\dfrac{5}{3}$

19. กำหนดให้ กราฟของ $y = f(x)$ มีความชันที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $2x + 2$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -3 พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ แกน X เส้นตรง $x = -1$ และเส้นตรง $x = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{7}{3}$ ตารางหน่วย 2. $\dfrac{8}{3}$ ตารางหน่วย 3. 9 ตารางหน่วย 4. 12 ตารางหน่วย

20. ในการผลิตสินค้าตามโครงการ OTOP ของตำบลหนึ่ง ในแต่ละวันผลิตผ้าฝ้ายได้ x ชิ้น และผลิตผ้าไหมได้ y ชิ้น โดยมีอสมการข้อจำกัดคือ

$$2x + y \leq 12$$
$$x + y \leq 8$$
$$x \geq 0 \text{ และ } 0 \leq y \leq 6$$

ถ้าผ้าฝ้ายและผ้าไหมมีราคาขายชิ้นละ 90 บาทและ 300 บาท ตามลำดับ แล้ว โครงการนี้จะขายสินค้าได้เงินมากที่สุดต่อวัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1,560 บาท 2. 1,800 บาท 3. 1,980 บาท 4. 2,400 บาท

21. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 10 ใบ แต่ละใบเขียนหมายเลข $-4, -3, -2, \ldots, 4, 5$ ใบละ 1 หมายเลข ถ้าสุ่มหยิบบัตรขึ้นมา 2 ใบพร้อมกันจากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรที่มีหมายเลขบนบัตรทั้งสองซึ่งมีผลคูณมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{5}{9}$ 3. $\frac{32}{45}$ 4. $\frac{41}{45}$

22. ให้ S เป็นเซตของจุด 10 จุดบนวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีสมบัติดังนี้ *เมื่อลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดใดๆ ใน S จะมีเพียง 3 เส้นเท่านั้นที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้* ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยเลือกจุด 3 จุด ใน S มาเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ความน่าจะเป็นที่จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4

23. โรงงานแห่งหนึ่งมีพนักงานจำนวน 40 คน และตารางแจกแจงความถี่สะสมของอายุพนักงานเป็นดังนี้

อายุ (ปี)	ความถี่สะสม
11 - 20	6
21 - 30	14
31 - 40	26
41 – 50	36
51 - 60	40

ถ้าผู้จัดการมีอายุ 48.5 ปี แล้ว พนักงานที่มีอายุระหว่างค่ามัธยฐานของอายุพนักงานและอายุของผู้จัดการมีจำนวนประมาณ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 31.5 % 2. 33.7 % 3. 35.0 % 4. 37.0 %

24. บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 20 คน เงินเดือนเฉลี่ยของพนักงานเท่ากับ 60,000 บาท และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10,000 บาท ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของเงินเดือนของพนักงานจำนวน 19 คน มีค่าเท่ากับ 2.5 แล้ว พนักงานอีก 1 คนที่เหลือมีเงินเดือนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 35,000 บาท 2. 57,500 บาท 3. 62,500 บาท 4. 85,000 บาท

25. ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z เป็นดังนี้

z	0.016	0.168	1.5	2.5
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.0062	0.0668	0.4332	0.4938

ถ้าคะแนนสอบเข้ามหาวิทยาลัยของนักเรียนจำนวน 10,000 คน มีการแจกแจงปกติ และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 58 คะแนน โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน แล้ว นักเรียนที่มีคะแนนระหว่าง 49 – 73 คะแนน มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4,394 คน 2. 5,606 คน 3. 73,000 คน 4. 9,270 คน

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบอัตนัย ข้อ 1-5 ข้อละ 2 คะแนน ข้อ 6-10 ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $h(x) = |1 - x^5|$ และ $g(x) = x^5$
   ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(g(x)) = h(x)$ แล้ว $f(5)$ มีค่าเท่าใด

2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{1,2\}, (1,2)\}$ เมื่อ $(1,2)$ หมายถึงคู่อันดับ และ $B = (A \times A) - A$
   จำนวนสมาชิกของเซต B เท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$
   ถ้า $f^{-1}(a) = \dfrac{2}{3}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ถ้า $\bar{w} = a\bar{i} + b\bar{j}$ โดยที่ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{u}$ และ $|\bar{w}| = 10$
   แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

5. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 0.12 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 แล้วสัมประสิทธิ์ของการแปรผันมีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ $\mathbf{I}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $S = \{x \in \mathbf{I} \mid 2x^2 - 9x - 26 \le 0$ และ $|1-2x| \ge 3\}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

7. ถ้า $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{a}{3^2} + \frac{a^2}{3^3} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & x & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

   ถ้า $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & x & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 5 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right]$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

9. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{a,b\}$
   ฟังก์ชันจาก A ไป<u>ทั่วถึง</u> B มีจำนวนทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน

10. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่ง 9, 12 และ 15 หาร x ลงตัว แต่ 11 หาร x เหลือเศษ 7 แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลยคำตอบตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ (A-NET)

ตอนที่ 1

1. 4	**2.** 3	**3.** 2	**4.** 1	**5.** 1
6. 4	**7.** 3	**8.** 1	**9.** 3	**10.** 4
11. 1	**12.** 2	**13.** 4	**14.** 1	**15.** 2
16. 3	**17.** 2	**18.** 4	**19.** 2	**20.** 3
21. 2	**22.** 2	**23.** 3	**24.** 1	**25.** 4

ตอนที่ 2

1. 4	**2.** 15	**3.** 0.5	**4.** 14	**5.** 0.2
6. 17	**7.** 1.5	**8.** 4	**9.** 30	**10.** 1800

ตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ (O-NET)

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบปรนัย ข้อ 1-16 ข้อละ 2 คะแนน ข้อ 17-32 ข้อละ 3 คะแนน

1. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}\right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 60 2. $60\sqrt{2}$ 3. $100\sqrt{2}$ 4. 200

2. $\dfrac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}}+\dfrac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $-\dfrac{13}{24}$ 2. $-\dfrac{5}{6}$ 3. $\dfrac{2}{3}$ 4. $\dfrac{19}{24}$

3. ถ้า $A-B=\{2, 4, 6\}$, $B-A=\{0, 1, 3\}$

   และ $A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   แล้ว $A\cap B$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$ 2. $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
   3. $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ 4. $\{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$

4. กำหนดให้ $A=\{a,b,c\}$ และ $B=\{0,1\}$ ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

   1. $\{(a,1), (b,0), (c,1)\}$ 2. $\{(0,b), (1,a), (1,c)\}$
   3. $\{(b,1), (c,0)\}$ 4. $\{(0,c), (1,b)\}$

5. กำหนดให้ $f(x)=-x^2+4x-10$ ข้อความในข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

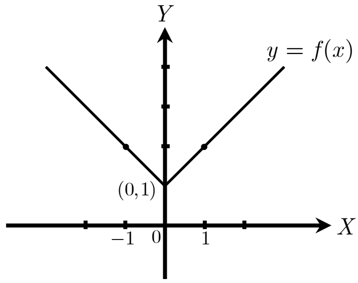
   1. f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ -6 2. f ไม่มีค่าสูงสุด
   3. f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 6 4. $f(\sqrt{\frac{9}{2}})<-6$

6. ถ้า P เป็นจุดวกกลับของพาราโบลา $y=-x^2+12x-38$ และ O เป็นจุดกำเนิด

   แล้ว ระยะทางระหว่างจุด P และจุด O เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\sqrt{10}$ หน่วย 2. $2\sqrt{10}$ หน่วย
   3. $\sqrt{13}$ หน่วย 4. $2\sqrt{13}$ หน่วย

7. ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในข้อใดมีกราฟดังรูปต่อไปนี้



1. $f(x) = 1 - |x|$
2. $f(x) = 1 + |x|$
3. $f(x) = |1 - x|$
4. $f(x) = |1 + x|$

8. ลำดับเรขาคณิตในข้อใดต่อไปนี้ มีอัตราส่วนร่วมอยู่ในช่วง (0.3, 0.5)

1. $3, \frac{5}{4}, \frac{25}{48}, \ldots$
2. $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$
3. $4, 3, \frac{9}{4}, \ldots$
4. $5, 4, \frac{16}{5}, \ldots$

9. ถ้าผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรมหนึ่งคือ $S_n = 3n^2 + 2$
แล้ว พจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 57
2. 82
3. 117
4. 302

10. $\sum_{k=1}^{50} \left(1 + (-1)^k\right) k$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1300
2. 1350
3. 1400
4. 1450

11. ป้าจุ๊เริ่มขายขนมครกในวันที่ 3 มกราคม ในวันแรกขายได้กำไร 100 บาท และในวันต่อๆ ไปจะขายได้กำไรเพิ่มขึ้นจากวันก่อนหน้าวันละ 10 บาททุกวัน ข้อใดต่อไปนี้เป็น<u>วันที่</u>ของเดือนมกราคมที่ป้าจุ๊ขายได้กำไรเฉพาะในวันนั้น 340 บาท

1. วันที่ 24
2. วันที่ 25
3. วันที่ 26
4. วันที่ 27

12. ถ้าผลบวกและผลคูณของสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่มี d เป็นผลต่างร่วมเท่ากับ 15 และ 80 ตามลำดับ แล้ว d^2 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 4
3. 9
4. 16

13. ค่าของ x ที่สอดคล้องสมการ $\sqrt{2}^{(x^2)} = \dfrac{2^{(4x)}}{4^4}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 4 4. 5

14. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 10, 12, 15, 13, และ 10
ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ สำหรับข้อมูลชุดนี้

1. มัธยฐานเท่ากับ 12
2. ฐานนิยมน้อยกว่า 12
3. ฐานนิยมน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต
4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากกว่า 12

15. เมื่อพิจารณาผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 39 คน พบว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 25 ของคะแนนสอบเท่ากับ 35 คะแนน และมีนักเรียน 30 คนได้คะแนนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 80 คะแนน ถ้ามีนักเรียนที่สอบได้ 35 คะแนนเพียงคนเดียว แล้ว จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนในช่วง 35 - 80 คะแนน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 18 คน 2. 19 คน 3. 20 คน 4. 21 คน

16. ข้อสอบชุดหนึ่งมี 2 ตอน ตอนที่หนึ่งมี 5 ข้อ ให้เลือกตอบว่าจริงหรือเท็จ
ตอนที่สองมี 5 ข้อ เป็นข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก
ถ้าต้องตอบข้อสอบชุดนี้ทุกข้อโดยไม่เว้นแล้ว จะมีวิธีตอบข้อสอบชุดนี้ได้ต่างๆ กันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $5^2 \times 5^4$ วิธี 2. $2^5 \times 5^4$ 3. $2^5 \times 4^5$ วิธี 4. $5^2 \times 4^5$ วิธี

17. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $a < b$ แล้ว จะได้ $a^2 < b^2$
2. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว จะได้ $ab < a^2$
3. ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว จะได้ $a < b$
4. ถ้า $a^2 < b^2$ แล้วจะได้ $a < b$

18. อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$
2. $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$
3. $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$
4. $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

19. ถ้า $x = \sin 65^\circ$ แล้ว อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x < x^2 < \dfrac{x}{1+x}$
2. $x < \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x^2}{1+x^2}$
3. $x^2 < x < \dfrac{x^2}{1+x^2}$
4. $\dfrac{x^2}{1+x^2} < x^2 < x$

20. กำหนดให้ $\mathbf{I}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $A = \left\{ x \in \mathbf{I} \,\middle|\, \dfrac{|x-1|-1}{|x-1|} \le \dfrac{2}{3} \right\}$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 5 3. 6 4. 7

21. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มีมุม A เท่ากับ 30° และมีพื้นที่เท่ากับ $24\sqrt{3}$ ตารางหน่วย ความยาวของด้าน AB เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 หน่วย 2. 14 หน่วย 3. 16 หน่วย 4. 18 หน่วย

22. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มีด้าน BC ยาวเท่ากับ $10\sqrt{3}$ หน่วย และด้าน AB ยาวเท่ากับ 20 หน่วย ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ไปตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D แล้ว จะได้ว่าด้าน CD ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $5\sqrt{2}$ หน่วย 2. $5\sqrt{3}$ หน่วย 3. $10\sqrt{2}$ หน่วย 4. $10\sqrt{3}$ หน่วย

23. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากับ 15 ตารางหน่วย และมีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin B = 3\sin A$ แล้วด้าน AB ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 หน่วย 2. $5\sqrt{3}$ หน่วย 3. $5\sqrt{2}$ หน่วย 4. 10 หน่วย

24. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ $a^{20} + 2a - 3 = 0$ แล้ว $1 + a + a^2 + \cdots + a^{19}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -3 3. -4 4. -5

25. เหตุ (1) ไม่มีคนขยันคนใดเป็นคนตกงาน
(2) มีคนตกงานที่เป็นคนใช้เงินเก่ง
(3) มีคนขยันที่ไม่เป็นคนใช้เงินเก่ง

ผล ในข้อใดต่อไปนี้เป็นการสรุปผลจาก เหตุ ข้างต้นที่เป็นไปอย่างสมเหตุสมผล

1. มีคนขยันที่เป็นคนใช้เงินเก่ง 2. มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนตกงาน
3. มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนขยัน 4. มีคนตกงานที่เป็นคนขยัน

26. ในการออกรางวัลแต่ละงวดของกองสลาก ความน่าจะเป็นที่รางวัลเลขท้าย 2 ตัวจะออกหมายเลขที่มีหลักหน่วยเป็นเลขคี่และหลักสิบมากกว่าหลักหน่วยอยู่ 1 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.04 2. 0.05 3. 0.20 4. 0.25

27. ตารางแสดงน้ำหนักของนักเรียนจำนวน 50 คน เป็นดังนี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	จำนวน (คน)
30 - 39	4
40 - 49	5
50 - 59	13
60 - 69	17
70 - 79	6
80 - 89	5

ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง
1. นักเรียนกลุ่มนี้ส่วนใหญ่มีน้ำหนัก 60 - 69 กิโลกรัม
2. นักเรียนที่มีน้ำหนักต่ำกว่า 50 กิโลกรัม มี 9 คน
3. นักเรียนที่มีน้ำหนักในช่วง 50 - 59 กิโลกรัม มี 26%
4. นักเรียนที่มีน้ำหนักมากกว่า 80 กิโลกรัม มี 10%

28. ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 4 คน บุตร 2 คนมีน้ำหนักเท่ากันและมีน้ำหนักน้อยกว่าบุตรอีก 2 คน ถ้าน้ำหนักของบุตรทั้ง 4 คนมีค่าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัยเท่ากับ 45, 47.5 และ 7 กิโลกรัมตามลำดับ แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของบุตรทั้ง 4 คน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 46 กิโลกรัม 2. 47 กิโลกรัม 3. 48 กิโลกรัม 4. 49 กิโลกรัม

29. ถ้าในปี พ.ศ. 2547 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่งเท่ากับ 23 ปี ในปีต่อมา บริษัทได้รับพนักงานเพิ่มขึ้นอีก 20 คน ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุพนักงานในปี พ.ศ. 2548 เท่ากับ 25 ปี และผลรวมของอายุของพนักงานเพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ. 2547 อีก 652 ปี เมื่อสิ้นปี พ.ศ. 2548 บริษัทแห่งนี้มีพนักงานทั้งหมดจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 76 คน 2. 96 คน 3. 326 คน 4. 346 คน

30. ถ้าน้ำหนัก (คิดเป็นกิโลกรัม) ของนักเรียน 2 กลุ่มๆ ละ 6 คน เขียนเป็นแผนภาพ ต้น-ใบ ได้ดังนี้

นักเรียนกลุ่มที่ 1				นักเรียนกลุ่มที่ 2		
8	6	4	3	4	9	
8	6	6	4	2	2	4
			5	0		

ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. น้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่ 2 มากกว่าน้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่ 1
2. ฐานนิยมของน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มที่ 2 มากกว่าฐานนิยมของน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มที่ 1
3. มัธยฐานของน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มที่ 2 มากกว่ามัธยฐานของน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มที่ 1
4. มัธยฐานของน้ำหนักของนักเรียนทั้งหมด มากกว่ามัธยฐานของน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มที่ 1

31. มีข้อมูล 5 จำนวนซึ่งเรียงจากน้อยไปมาก คือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

โดยมี $x_1 = 7$, ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\overline{x}$ และความแปรปรวนเท่ากับ 16

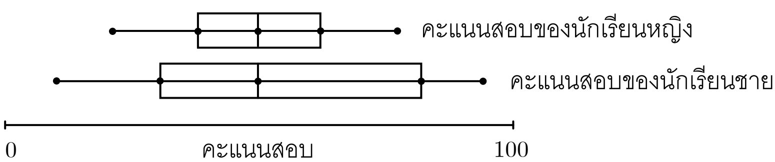
ถ้ากำหนดตารางแสดงค่าของ $x_i - \overline{x}$ ดังนี้

i	$x_i - \overline{x}$
1	$7 - \overline{x}$
2	-3
3	-1
4	3
5	6

แล้ว ค่าของ $\overline{x}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 10.5 3. 12 4. 12.5

32. จากแผนภาพกล่องของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนจำแนกตามเพศเป็นดังนี้



ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. คะแนนสอบเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายสูงกว่าคะแนนสอบเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหญิง
2. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายมีการกระจายเบ้ขวา
3. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหญิงมีการกระจายมากกว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชาย
4. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหญิงมีการกระจายเบ้ขวา

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบอัตนัย ข้อ 1-10 ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า $f = \{(1,0),(2,1),(3,5),(4,3),(5,2)\}$ แล้ว $f(2)+f(3)$ มีค่าเท่าใด

2. ถ้า $4^a = \sqrt{2}$ และ $16^{-b} = \dfrac{1}{4}$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก
   ถ้า $\cot A = \dfrac{12}{5}$ แล้ว $10\operatorname{cosec} A + 12\sec A$ มีค่าเท่าใด

4. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \dfrac{3}{5}$
   แล้ว $\cos(B-A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 10 จำนวนประกอบด้วยจำนวนต่อไปนี้

   4, 8, 8, 9, 14, 15, 18, 18, 22, 25

   ควอร์ไทล์ที่สามของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. ในการเขียนตัวเลข 3 หลัก จากเลขโดด 1 ถึง 7 โดยที่เลขโดดในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกันเลย จะมีวิธีเขียนตัวเลขเหล่านี้ที่แสดงจำนวนคี่ได้กี่วิธี

7. มีกล่อง 2 ใบ แต่ละใบมีลูกบอลหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 อยู่อย่างละลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูก จากกล่องทั้งสองใบนี้ กล่องละลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลหมายเลขต่างกันเท่ากับเท่าใด

8. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 100 คน ได้ข้อมูลว่ามีนักเรียนที่สวมรองเท้าขนาดต่างๆ ดังนี้

เบอร์รองเท้า	จำนวนนักเรียน
5	3
6	12
7	35
8	27
9	16
10	7
	รวม 100 คน

   เมื่อเลือกนักเรียน 1 คน จากนักเรียนกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้นักเรียนสวมรองเท้าเบอร์ 6 หรือเบอร์ 7 เท่ากับเท่าใด

9. ในการสอบถามพ่อบ้านจำนวน 300 คน
พบว่า มีคนที่<u>ไม่ดื่ม</u>ทั้งชาและกาแฟ 100 คน
มีคนที่ดื่มชา 100 คน
และ มีคนที่ดื่มกาแฟ 150 คน
พ่อบ้านที่ดื่มทั้งชาและกาแฟมีจำนวนเท่าใด

10. กำหนดให้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A
ถ้า $r_1 = \{(-1,-2), (0,-1), (1,2), (2,-3), (3,4)\}$
และ $r_2 = \{(x,y) \mid |y+1| = x\}$
แล้ว $n(r_1 \cap r_2)$ เท่ากับเท่าใด

เฉลยคำตอบตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ (O-NET)

ตอนที่ 1

1. 4	**2.** 1	**3.** 3	**4.** 4	**5.** 4
6. 2	**7.** 2	**8.** 1	**9.** 1	**10.** 1
11. 4	**12.** 3	**13.** 3	**14.** 4	**15.** 4
16. 3	**17.** 2	**18.** 3	**19.** 4	**20.** 4
21. 1	**22.** 2	**23.** 4	**24.** 1	**25.** 2
26. 1	**27.** 4	**28.** 3	**29.** 2	**30.** 1
31. 3	**32.** 2			

ตอนที่ 2

1. 6	**2.** 0.75	**3.** 39	**4.** 0.8	**5.** 19
6. 120	**7.** 0.8	**8.** 0.47	**9.** 50	**10.** 2