



วิชา
คณิตศาสตร์
(O NET)



โดย พศ.ปิญญา รังษิภาญจน์ส่อง
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เซต

เซต เป็นคำที่ไม่มีนิยามจะหมายถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต

- การเขียนสัญลักษณ์ของเซตเขียนได้ 2 แบบ
 - แบบแจกแจงสมาชิก เช่น $\{a, b, c\}$
 - แบบเงื่อนไข เช่น $\{x|x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$
 $*x \in A$ หมายถึง x เป็นสมาชิกของเซต A
- เซตจำกัดและเซตอนันต์
 - เซตจำกัด คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น \emptyset (เซตว่าง), $\{1, 3, 5\}$
 - เซตอนันต์ คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่มีสิ้นสุดเช่น $\{1, 2, 3, \dots\}$
- การเท่ากันของเซต
 $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว เช่น $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 1, 2\}$ จะเห็นว่าสมาชิกของ A และ B เหมือนกันทุกตัว แต่ไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับเหมือนกัน
- สับเซต
 A เป็นสับเซตของ B ($A \subset B$) ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
- เอกภพสัมพัทธ์ (U) คือ เซตซึ่งกำหนดขึ้นมาโดยที่เมื่อกล่าวถึงเซตใดก็ตามเซตนั้นย่อมเป็นสับเซตของ U
- เพาเวอร์เซต
 เพาเวอร์เซตของ A ($P(A)$) = $\{x|x \subset A\}$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

1. $\phi \in P(A)$ และ $\phi \subset P(A)$
2. $A \in P(A)$, $A - B \in P(A)$, $A \cap B \in P(A)$
3. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
4. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
5. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
6. $P(A) - P(B) \neq P(A - B)$
7. $P(A - B) \subset (P(A) - P(B)) \cup \{\phi\}$
8. $n(P(A)) = 2^{nA}$

คุณสมบัติเกี่ยวกับเซต

1. $U \cap A = A$
2. $U \cup A = U$
3. $U - A = \underline{A'}$
4. $\phi \cap A = \phi$
5. $\phi \cup A = A$
6. $A - \phi = \underline{A}$
7. $\phi - A = \underline{\underline{\phi}}$
8. $A - B = A \cap B'$
9. $A - B = B' - A'$
10. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
11. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
12. $(A - B)' = (A \cap B)' = A' \cup B$
13. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
14. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
15. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
16. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
17. $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$
18. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$, $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$
19. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$, $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$
20. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$, $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \phi$
21. $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$, $A \cup B = U$ ก็ต่อเมื่อ $A' \subset B$
22. $A \cup B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ และ $B = \phi$
23. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$ (คุณสมบัติถ่ายทอดของการเป็น Subset)



$$24. \text{ ถ้า } A \subset B \text{ และ } C \subset D \text{ แล้ว } \begin{cases} A \cup C \subset B \cup D \\ A \cap C \subset B \cap D \end{cases}$$

*ตรงนี้ต้องระวัง ถ้า $\begin{cases} A \cup C \subset B \cup D \\ A \cap C \subset B \cap D \end{cases}$ สรุปไม่ได้ว่า $A \subset B$ และ $C \subset D$

$$25. \text{ ถ้า } A \subset B \text{ แล้ว } \begin{cases} 1. A \cup C \subset B \cup C \\ 2. A \cap C \subset B \cap C \\ 3. A - C \subset B - C \end{cases} \text{ ตรงนี้ก็เช่นกันไม่มีบทกลับ}$$

$$26. (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$27. (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

28. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

29. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $B \subset A$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด

30. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ B เป็นเซตอนันต์ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์

31. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์

32. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตอนันต์ $A \cap B$ อาจเป็นเซตอนันต์หรือเซตจำกัดก็ได้

$$33. n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$34. n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$35. n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$36. n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

37. ถ้า $n(A) = m$ แล้ว $n(P(A)) = 2^m =$ จำนวนสับเซตของ A

แบบทดสอบ

1. ให้ A, B, C, D เป็นเซตใดๆ $(A \cap C) - (B \cup D)$ เท่ากับเซตในข้อใด

1) $(A - B) \cap (D - C)$

2) $(A - B) \cap (C - D)$

3) $(A - B) \cup (D - C)$

4) $(A - B) \cup (C - D)$

2. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(S)$ = เพาเวอร์เซตของ S

ถ้า $X = \{A \in P(S) \mid 1 \in A \text{ และ } 7 \notin A\}$

และ $Y = \{A \in X \mid \text{ผลบวกของสมาชิกใน } A \text{ ไม่เกิน } 6\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของ X และ Y (ตามลำดับ) เท่ากับข้อใด

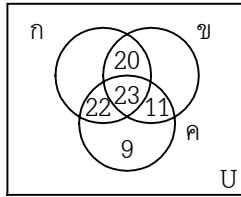
1) 16, 5

2) 16, 6

3) 32, 5

4) 32, 6

3. ในการสำรวจความนิยมของคนจำนวน 100 คน ที่มีต่อนาย ก นาย ข และนาย ค โดยทุกคนต้องแสดงความนิยมคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน ปรากฏว่านาย ก ได้รับคะแนนความนิยมนานกว่านาย ข อยู่ 6 คะแนน และเขียนเป็นแผนภาพได้ ดังรูป



ข้อใดผิด

- 1) นาย ข ได้คะแนนนิยมน้อยที่สุด
 - 2) ผลรวมของคะแนนนิยมของนาย ก นาย ข และนาย ค คือ 199
 - 3) ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้เฉพาะนาย ก เท่านั้น มีจำนวน 10 คน
 - 4) ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้นาย ข มีจำนวน 64 คน
4. ถ้า $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{0, \{1\}, \{0, 1\}\}$ แล้วข้อใดเป็นจริง
- 1) $A \in P(B)$
 - 2) $\{1\} \in P(A) \cap P(B)$
 - 3) จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B) = 2$
 - 4) จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B) = 8$
5. จากการสำรวจผู้ฟังเพลงจำนวน 180 คน พบว่ามีผู้ชอบเพลงไทยสากล 95 คน เพลงไทยเดิม 92 คน เพลงลูกทุ่ง 125 คน เพลงไทยสากลและเพลงไทยเดิม 52 คน เพลงไทยสากลและเพลงลูกทุ่ง 43 คน เพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 57 คน และทั้ง 180 คน จะชอบฟังเพลงอย่างน้อยหนึ่งประเภทในสามประเภทดังกล่าวข้างต้น จำนวนคนที่ชอบฟังเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียวเท่ากับข้อใด
- 1) 20
 - 2) 25
 - 3) 30
 - 4) 35

6. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

$$A = \{x \in R \mid 3x^2 + x - 2 > 0\} \text{ และ } B = \{x \in R \mid |3 - 2x| \leq 4\}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $B - A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

ข. $A \cup B' = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

ข้อใดถูก

- 1) ก. และ ข. ถูก
 - 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
 - 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
 - 4) ก. และ ข. ผิด
7. ให้ $A = \{1, a, 2, b, 3, c\}$, $B = \{1, 2\}$ จำนวนสับเซต S ของ A ซึ่ง $S \cap B \neq \emptyset$ เท่ากับค่าในข้อใด
- 1) 48
 - 2) 32
 - 3) 24
 - 4) 16
8. จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง พบว่า
- ก. มี 20 คน ที่เลือกเรียนฝรั่งเศสหรือคณิตศาสตร์
 - ข. ถ้าเลือกเรียนฝรั่งเศสแล้วจะต้องไม่เรียนคณิตศาสตร์
 - ค. มีอยู่ 17 คน ที่ไม่เรียนคณิตศาสตร์
 - ง. มีอยู่ 15 คน ที่ไม่เรียนฝรั่งเศส
- นักเรียนที่ไม่เรียนทั้งสองวิชามีจำนวนเท่ากับข้อใด
- 1) 6
 - 2) 12
 - 3) 26
 - 4) 32



9. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ ข้อใดถูก
- 1) $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$
 - 2) $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}\}$
 - 3) $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{\{b, c\}\}$
 - 4) $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{b, c\}$
10. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1$
 $(A - B)'$ เท่ากับข้อใด
- 1) $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
 - 2) $(-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$
 - 3) $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$
 - 4) $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$
11. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 500 และหารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว มีจำนวนเท่ากับข้อใด
- 1) 167
 - 2) 200
 - 3) 233
 - 4) 266
12. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 80 คน และมีชมรมกีฬา 3 ชมรม คือ ฟุตบอล กรีฑา และว่ายน้ำ นักเรียนทุกคนต้องเป็นสมาชิกอย่างน้อย 1 ชมรม ถ้ามีนักเรียน 30 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ มีนักเรียน 20 ที่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมฟุตบอล และมีนักเรียน 18 คน ที่เป็นสมาชิกทั้งชมรมฟุตบอลและชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมกรีฑาแล้วจำนวนนักเรียนที่เป็นสมาชิกทั้ง 3 ชมรมเท่ากับข้อใด
- 1) 3
 - 2) 12
 - 3) 14
 - 4) 15

เฉลย

1. 3) 2. 4) 3. 3) 4. 3) 5. 1) 6. 3) 7. 1) 8. 1) 9. 1) 10. 4)
 11. 3) 12. 2)

การให้เหตุผล

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมี 2 วิธี

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริงจากการสังเกต หรือการทดลองหลายๆ ครั้งจากกรณีย่อยๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

ตัวอย่าง	พิจารณาจำนวนนับที่มีผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักหารด้วย 9 ลงตัว		
	จำนวนนับ	ผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลัก	ผลหารของจำนวนนับด้วย 9
	198	$1 + 9 + 8 = 18$	$198 \div 9 = 22$
	27963	$2 + 7 + 9 + 6 + 3 = 27$	$27963 \div 9 = 3107$
	5220	$5 + 2 + 2 + 0 = 9$	$5220 \div 9 = 580$

จากตัวอย่างของจำนวนนับข้างต้น จะสังเกตว่าเมื่อผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักหารด้วย 9 ลงตัว จำนวนนับดังกล่าวจะหารด้วย 9 ลงตัวเช่นกัน

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง การนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลงนิยาม ทฤษฎี หรือกฎซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

การให้เหตุผลแบบนิรนัยอาจจะเขียนอยู่ในรูป

- เหตุ**
1. p_1
 2. p_2
 - ⋮
 - k. p_k

ผล q

โดยยอมรับว่า p_1, p_2, \dots, p_k เป็นความจริงทุกข้อ การให้เหตุผลแบบนี้จะสมเหตุสมผล เมื่อ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow q$ เป็นความจริง การตรวจสอบว่าข้อสรุปสมเหตุสมผลหรือไม่นั้นอาจตรวจสอบได้โดยวิธีวาดแผนภาพตามสมมติฐานที่เป็นไปได้แล้วจึงพิจารณาว่าแผนภาพแต่ละกรณีตรงกับผลสรุปหรือไม่

ถ้าตรงกับผลสรุปทุกกรณี แสดงว่าการสรุปผลนั้นสมเหตุสมผล

ถ้ามีแผนภาพอย่างน้อยหนึ่งกรณีที่ขัดแย้งกับผลสรุป แสดงว่าการสรุปผลนั้นไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 เหตุ

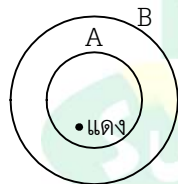
1. นักกีฬาทุกคนเป็นคนแข็งแรง
2. แดงเป็นนักกีฬา

ผล แดงเป็นคนแข็งแรง

วิธีทำ ในที่นี้มีเซต 2 เซต

1. เซตของนักกีฬาให้เป็นเซต A
2. เซตของคนแข็งแรงให้เป็นเซต B

เขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของเซตทั้งสองซึ่งจะเห็นว่า $A \subseteq B$



กรณีนี้มีแผนภาพเดียวและตรงกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ ดังนั้นการให้เหตุผลนี้จึงสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2 เหตุ

1. นักเรียนที่เล่นฟุตบอลบางคนชอบเล่นเทนนิส
2. นักเรียนที่ชอบเล่นเทนนิสบางคนชอบเล่นแบดมินตัน

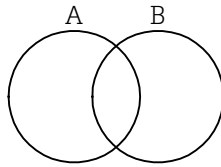
ผล มีนักเรียนที่เล่นฟุตบอลบางคนชอบเล่นแบดมินตัน

วิธีทำ ในที่นี้มีเซต 3 เซต

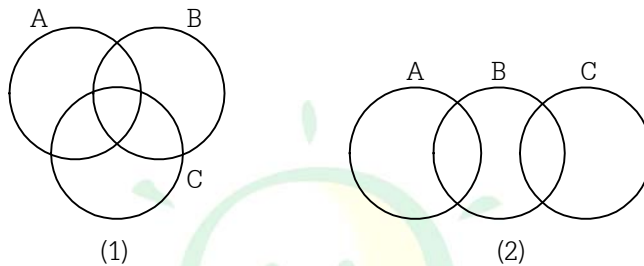
1. เซตของนักเรียนที่เล่นฟุตบอลให้เป็นเซต A
2. เซตของนักเรียนที่เล่นเทนนิสให้เป็นเซต B
3. เซตของนักเรียนที่เล่นแบดมินตันให้เป็นเซต C



- เขียนแผนภาพแทนนักเรียนที่ชอบเล่นฟุตบอลบางคนชอบเล่นเทนนิส



- เขียนแผนภาพแทนนักเรียนที่ชอบเล่นเทนนิสบางคนชอบเล่นแบดมินตันซึ่งมีได้ 2 กรณี



จะเห็นว่าแผนภาพในกรณีที่สองขัดแย้งกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ ดังนั้นการให้เหตุผลนี้จึงไม่สมเหตุสมผล

โจทย์การให้เหตุผล

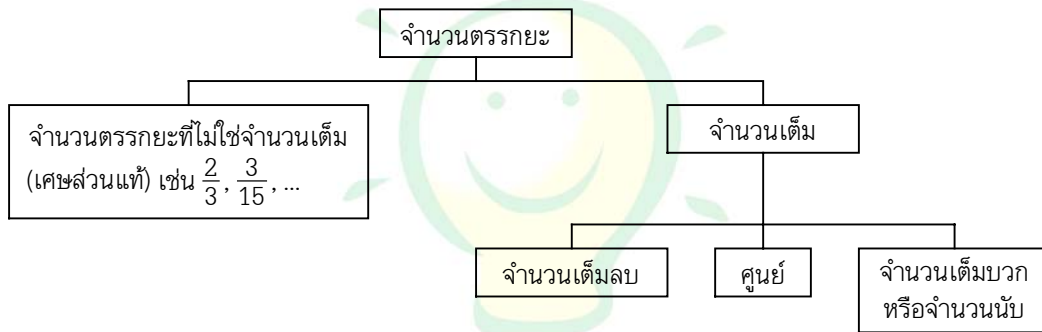
- จงหาจำนวน a โดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย
 - $-15, -5, 5, 15, a$
 - $1, 4, 9, 16, a$
 - $1, 3, 6, 10, a$
 - $2, 6, 12, 20, a$
 - $1, 5, 14, 30, a$
- จงตรวจสอบว่าผลสรุปต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพ
 - เหตุ 1. ปลาทุกตัวว่ายน้ำได้
2. สัตว์ที่ว่ายน้ำได้จะบินได้
ผล ปลาทุกตัวบินได้
 - เหตุ 1. คนที่มีสุขภาพจิตดีเป็นคนฉลาด
2. สมชายเป็นคนฉลาด
ผล สมชายมีสุขภาพจิตดี
 - เหตุ 1. นกบางตัวมี 4 ขา
2. สุนัขทุกตัวมี 4 ขา
ผล สุนัขบางตัวเป็นนก
 - เหตุ 1. จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัวทุกจำนวนเป็นจำนวนคู่
2. 29 หารด้วย 2 ลงตัว
ผล 29 เป็นจำนวนคู่

คำตอบโจทย์การให้เหตุผล

1. 1. 25 2. 25 3. 15 4. 30 5. 55
2. 1. สมเหตุสมผล 2. ไม่สมเหตุสมผล
3. ไม่สมเหตุสมผล 4. สมเหตุสมผล

จำนวนจริง

เซตของจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนตรรกยะกับเซตของจำนวนอตรรกยะ
จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนจริงที่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์



จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนจริงที่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ ได้แก่ ทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น 0.1010010001... Surdแท้ เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, ...

1. คุณสมบัติที่เกี่ยวกับ U กับตัวปฏิบัติการระหว่างสมาชิกใน U

1. คุณสมบัติปิด ทุก $a, b \in U$ แล้ว $a * b \in U$
2. คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม ทุก $a, b, c \in U$ แล้ว $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. คุณสมบัติสลับที่ ทุก $a, b \in U$ แล้ว $a * b = b * a$
4. คุณสมบัติการมีเอกลักษณ์ มี $I \in U$ ซึ่งทุก $x \in U$ $I * x = x * I$
5. คุณสมบัติการมีอินเวอร์ส อินเวอร์สของ a คือ a^{-1} ซึ่ง $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$

2. อสมการ

1. $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c < b + c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
3. ถ้า $a < b$ แล้ว $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
5. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$



6. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $0 < ac < bd$
7. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd > 0$
8. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^{n_1} > a^{n_2}$ ($n_1 > n_2$)
9. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^{n_1} < a^{n_2}$ ($n_1 > n_2$)
10. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a^{2N} > a$ ($N \in \mathbb{I}^+$) ($(-2)^2 > -2$)
11. ถ้า $x^{2N} < a > 0$ แล้ว $-\sqrt[2N]{a} < x < \sqrt[2N]{a}$
12. ถ้า $x^{2N} > a > 0$ แล้ว $x > \sqrt[2N]{a}$ หรือ $x < -\sqrt[2N]{a}$
13. ถ้า $x^{2N+1} < a \in \mathbb{R}$ แล้ว $x < \sqrt[2N+1]{a}$
14. ถ้า $x^{2N+1} > a \in \mathbb{R}$ แล้ว $x > \sqrt[2N+1]{a}$

3. ค่าสัมบูรณ์

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|x| \geq 0$
2. $|x^{2N}| = |x|^{2N} = x^{2N}$
3. สำหรับ $k > 0$
 $|x| = k$ ก็ต่อเมื่อ $x = k$ หรือ $x = -k$
 $|x| < k$ ก็ต่อเมื่อ $-k < x < k$
 $|x| > k$ ก็ต่อเมื่อ $x > k$ หรือ $x < -k$
4. $a^2 < b^2$ ก็ต่อเมื่อ $|a| < |b|$
5. $|x + y| = |x| + |y|$ ถ้า $xy > 0$ เช่น $|(-3) + (-2)| = |-3| + |-2| = 5$
6. $|x + y| = ||x| - |y||$ ถ้า $xy < 0$ เช่น $|(-5) + 2| = ||-5| - |2|| = 3$
7. $|xy| = |x| |y|$
8. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

สูตรแยกตัวประกอบ

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

การแก้สมการกำลัง 2 ตัวแปรเดียว

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว คือ สมการที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวและ $a \neq 0$

วิธีแก้สมการกำลัง 2 ตัวแปรเดียว มีวิธีที่สำคัญอยู่ 2 วิธี

1. แยกตัวประกอบกรณีที่สามารถแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ได้

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}x^2 + 4x - 32 &= 0 \\(x + 8)(x - 4) &= 0 \\x &= -8, 4\end{aligned}$$

2. ใช้สูตรสำเร็จใช้ในกรณีที่ $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ (กรณีแยกตัวประกอบได้จะใช้วิธีนี้ได้)

สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}x^2 + 8x - 5 &= 0 \quad \text{กรณีนี้ } a = 1, b = 8, c = -5 \\x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \\&= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 20}}{2} \\&= \frac{-8 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{21}}{2} \\&= -4 \pm \sqrt{21} \\&= -4 + \sqrt{21}, -4 - \sqrt{21}\end{aligned}$$

คุณสมบัติที่น่าสนใจของรากของสมการกำลัง 2

ถ้า α, β เป็นราก (คำตอบ) ของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ 1. ผลบวกของราก $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

2. ผลคูณของราก $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

ตัวอย่าง ถ้า α, β เป็นรากของสมการ $x^2 + x - 1 = 0$ จงหาค่าของ $\alpha^2 + \beta^2$

วิธีทำ จากคุณสมบัติของรากของสมการกำลังสอง

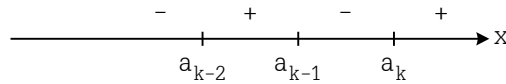
$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -1 && \dots(1) \\ \alpha\beta &= -1 && \dots(2) \\ (1)^2 & \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 1 && \dots(3) \\ 2(2) & 2\alpha\beta = -2 && \dots(4) \\ (3) - (4) & \alpha^2 + \beta^2 = 3\end{aligned}$$



การแก้สมการโดยใช้ทฤษฎีเส้นจำนวน

ทฤษฎีเส้นจำนวน ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดย $f(x)$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) \text{ และ } a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_k$$



คือ ในช่วงขวาสุด $x \geq a_k$ จะได้ $f(x) \geq 0$ ($f(a_k) = 0$)

ช่วง $a_{k-1} \leq x \leq a_k$ จะได้ $f(x) \leq 0$ ($f(a_{k-1}) = 0$)

ช่วง $a_{k-2} \leq x \leq a_{k-1}$ จะได้ $f(x) \geq 0$ ($f(a_{k-2}) = 0$)

ตัวอย่างที่ 1 $x^2 - x - 2 \leq 0$

วิธีทำ

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$(x - 2)(x + 1) \leq 0$$

A horizontal number line with an arrow pointing to the right. Two points are marked: -1 and 2. Above the line, the signs are: '+' to the left of -1, '-' between -1 and 2, and '+' to the right of 2. The region between -1 and 2 is shaded with diagonal lines.

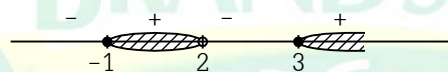
จากเส้นจำนวนจะได้เซตคำตอบเป็น $[-1, 2]$

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} \geq 0$

วิธีทำ

$$\frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 2)} \geq 0$$

*แม้ซ้ายมือจะอยู่ในรูปผลคูณและผลหารของพหุนามดีกรีหนึ่งก็ยังไม่ใช้หลักการจากทฤษฎีเส้นจำนวนได้ แต่ต้องไม่ลืมว่าส่วนเป็นศูนย์ไม่ได้



ดังนั้นเซตคำตอบจะเป็น $[-1, 2) \cup [3, \infty)$

เลขยกกำลัง

สูตรเลขยกกำลัง

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

8. ถ้า $a^x = a^y$ โดย $a \neq 0, \pm 1$ แล้วจะได้ $x = y$

9. ถ้า $a^x = b^x$ โดย $|a| \neq |b|$ จะได้ $x = 0$

รากที่ n ของจำนวนจริง

นิยาม ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

*จากนิยามจะเห็นว่าในหลักสูตรนี้เราสนใจเฉพาะรากที่ n ของจำนวนจริงที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น

*เรียก $\sqrt[n]{a}$ ว่าค่าหลักของรากที่ n ของ a หรือกรณีที่ n ของ a รากที่ 2 ของ 4 มี 2 ค่า คือ 2 กับ -2 แต่กรณีที่ 2 ของ 4 มีค่าเดียวเท่ากับ 2 หรือรากที่ 2 ของ 4 เท่ากับ $\sqrt{4}$ กับ $-\sqrt{4}$

สมบัติของรากที่ n ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ($n > 1$)

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง

2. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$

3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

นิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง และ $a^{1/n}$ เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n > 0$ และ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำจะได้ว่า

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ex 1 กำหนดให้ $\sqrt{6} = 2.45$ จงหาค่าของ $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{6} + 6 + 3 + \sqrt{6}}{3 - 2} \\ &= 4\sqrt{6} + 9 = 4 \times 2.45 + 9 = 18.8 \end{aligned}$$

Ex 2 จงหาค่า y จากสมการ $2^{4y} \cdot 4^{y-3} = 8^{y+1}$

วิธีทำ

$$2^{4y} \cdot (2^2)^{y-3} = (2^3)^{y+1}$$

$$2^{4y-6} = 2^{3y+3}$$

$$4y - 6 = 3y + 3$$

$$3y = 9$$

$$y = 3$$

Ex 3 ถ้า $2^x = 3^y = 12^z$ แล้ว z เท่ากับข้อใด

*1) $\frac{xy}{x+2y}$ 2) $\frac{xy}{x-2y}$ 3) $\frac{xy}{2y-x}$ 4) $\frac{xy}{y+2x}$

วิธีทำ

จาก $2^x = 3^y = 12^z = (2^2 \cdot 3)^z = 2^{2z} \cdot 3^z$

$$3^y = 2^x$$

$$(3^y)^{z/y} = (2^x)^{z/y}$$

$$3^z = 2^{xz/y}$$

ดังนั้น $2^x = 2^{2z} \cdot 2^{xz/y} = 2^{2z+xz/y}$

$$2z + \frac{xz}{y} = x$$

$$z(2y+x) = xy$$

$$z = \frac{xy}{x+2y}$$

แบบทดสอบ

1. ถ้า a, b เป็นรากของสมการ $x^2 - x - 3 = 0$ แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 1) 7 2) 6 3) 5 4) 4
2. รากของสมการ $ax^2 - 4x + c = 0$ จะมีค่าเท่ากันเมื่อ ac มีค่าเท่ากับข้อใด
 1) 2 2) 3 3) 4 4) 6
3. ผลบวกของรากของสมการ $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x+1} = 0$ เท่ากับข้อใด
 1) -1 2) 1 3) 2 4) -2
4. เซตคำตอบของสมการ $\frac{3x-2}{|x|-1} \geq 2$ คือข้อใด
 1) $(-1, 0] \cup (1, \infty)$ 2) $(-2, 0] \cup (1, \infty)$ 3) $(1, \infty)$ 4) $(2, \infty)$
5. เซตคำตอบของสมการ $\frac{x^2}{x+1} > x$ เป็นสับเซตของเซตใด
 1) $(-\infty, -2)$ 2) $(-10, -1)$ 3) $(-2, 1)$ 4) $(1, \infty)$

6. ถ้า A คือเซตคำตอบของ $3x + 5 < x - 7$
 B คือเซตคำตอบของ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ แล้ว $A' \cap B$ เท่ากับช่วงในข้อใด
 1) $(-6, 0)$ 2) $(2, \infty)$ 3) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ 4) $[-6, 0) \cup (2, \infty)$
7. เซตคำตอบของอสมการ $3 \leq |x + 1| \leq 7$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด
 1) $(-10, 4)$ 2) $(-9, -2) \cup (1, 7)$ 3) $(-5, 8)$ 4) $(-10, -3) \cup (3, 8)$
8. ถ้า $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$ ค่าของ $2^x + x$ เท่ากับข้อใด
 1) 7 2) 9 3) 11 4) 13
9. ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการ $\frac{18}{x} - x + 3 = 0$ เท่ากับข้อใด
 1) 7 2) 9 3) 13 4) 15
10. ค่าของ $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2 - \sqrt{14-6\sqrt{5}}}$ เท่ากับข้อใด
 1) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 2) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{2}$ 4) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$
11. ถ้า $\sqrt{x^2 - 10x + 41} - \sqrt{x^2 + 10x + 41} = 8$ แล้ว $3x + 25$ เท่ากับข้อใด
 1) 5 2) -3 3) 1 4) -1

เฉลย

1. 1) 2. 3) 3. 3) 4. 1) 5. 1) 6. 4) 7. 2) 8. 3) 9. 2) 10. 2)
 11. 1)

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. คู่อันดับ (a, b)

การเท่ากันของคู่อันดับ $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

2. ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$$



3. ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับ

ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B ($r : A \rightarrow B$) คือ สับเซตของ $A \times B$

โดเมน $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

อินเวอร์สของ $r = \{(x, y) \mid y = r(x)\}$ คือ $r^{-1} = \{(x, y) \mid x = r(y)\}$ หรือ $r^{-1} = \{(y, x) \mid y = r(x)\}$

ข้อสังเกต $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

4. ฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์ f จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

2. ฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B ($f : A \rightarrow B$)

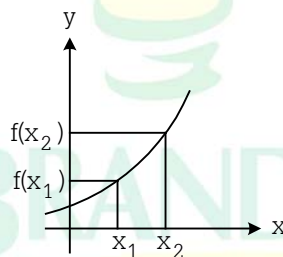
ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B เมื่อ $D_f = A$, $R_f \subset B$

3. f จะเป็น 1-1 ฟังก์ชัน เมื่อ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

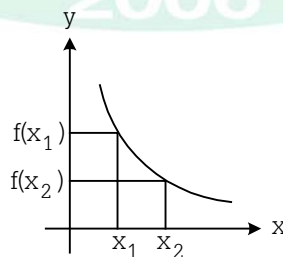
4. ฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B

f จะเป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B เมื่อ $D_f = A$ และ $R_f = B$

5. ฟังก์ชันเพิ่ม ถ้าฟังก์ชัน $f \subset R \times R$ f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$



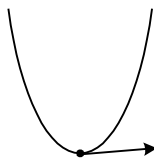
6. ฟังก์ชันลด ถ้าฟังก์ชัน $f \subset R \times R$ f จะเป็นฟังก์ชันลดก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



1. **ฟังก์ชันเชิงเส้น** คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$ ฟังก์ชันเชิงเส้นจะมีกราฟเป็นเส้นตรงกรณี $a = 0$ จะได้ $y = b$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันคงตัว** กราฟเส้นตรงที่ได้จากสมการ $y = ax + b$ จะมีความชันเท่ากับ a ค่าตัดแกน y เท่ากับ b และค่าตัดแกน x เท่ากับ $-\frac{b}{a}$

2. **ฟังก์ชันกำลังสอง** คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$ กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะเป็นกราฟพาราโบลา มีได้ 2 ลักษณะ

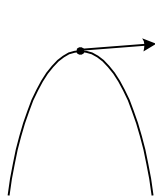
1. ถ้า $a > 0$ จะเป็นกราฟพาราโบลาหงาย



จะมีจุดยอดอยู่ที่จุด $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

และที่จุดยอดนี้จะให้ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

2. ถ้า $a < 0$ จะเป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ

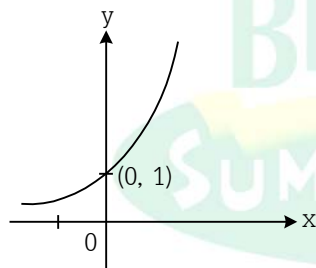


จะมีจุดยอดอยู่ที่จุด $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

และที่จุดยอดนี้จะให้ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

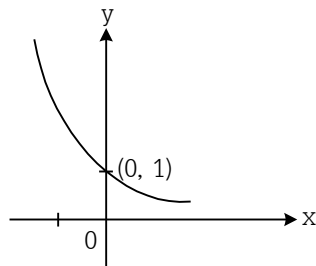
3. **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล** คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะมี 2 ลักษณะ

1. ฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $a > 1$ เช่น $y = 2^x$



กราฟมีลักษณะโค้งขึ้นจากซ้ายไปขวา
เฉียดเข้าหาแกน x ทางซ้าย
ตัดแกน y ที่จุด $(0, 1)$

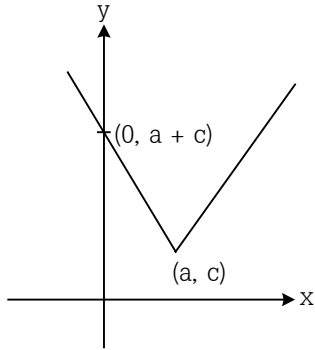
2. ฟังก์ชันลด เมื่อ $0 < a < 1$ เช่น $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



กราฟมีลักษณะโค้งลงจากซ้ายไปขวา
เฉียดเข้าหาแกน x ทางขวา
ตัดแกน y ที่จุด $(0, 1)$



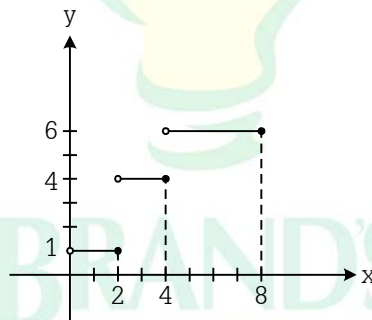
4. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ ที่จะกล่าวถึงในขั้นนี้คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = |x - a| + c$ เมื่อ a และ c เป็นจำนวนจริง กราฟของฟังก์ชันนี้จะอยู่ในรูปเส้นตรงหักมุม จุด (a, c) จะเป็นจุดหักมุม



*กรณีนี้ $a > 0, c > 0$ จุดตัดแกน y คือ $(0, a + c)$

5. ฟังก์ชันขั้นบันได หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง และมีค่าของฟังก์ชันเป็นค่าคงตัวเป็นช่วงๆ มากกว่าสองช่วง กราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคล้ายขั้นบันได

ตัวอย่าง $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 2 \\ 4 & 2 < x \leq 4 \\ 6 & 4 < x \leq 8 \end{cases}$



แบบทดสอบ

- ถ้า $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ โดเมนของฟังก์ชัน f คือข้อใด
 - $[-4, 4]$
 - $[-2, 2]$
 - $[0, 2]$
 - $(-2, 2)$
- ถ้า $f(x) = \sqrt{25 + x^2}$ เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือข้อใด
 - $[5, \infty)$
 - \mathbb{R}
 - $[25, \infty)$
 - $\mathbb{R} - (-5, 5)$
- ถ้า $f(x) = |x - 2| + 3$ $D_f \cap R_f$ คือข้อใด
 - \mathbb{R}
 - $[3, \infty)$
 - $[7, \infty)$
 - $[5, \infty)$

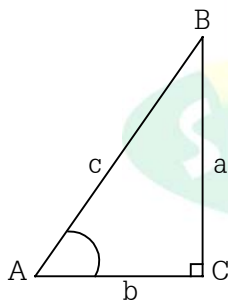
4. ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $y = x^2 - 4x + 8$ ในช่วง $[-7, 4]$ ตามลำดับ ค่าของ $a + b$ ตรงกับข้อใด
- 1) 89 2) 99 3) 103 4) 105
5. จำนวนรากทั้งหมดของสมการ $(1.5)^x = 4x^2$ ตรงกับข้อใด
- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3
6. จำนวนรากทั้งหมดของสมการ $|4x - x^2| = \frac{x+2}{2}$ ตรงกับข้อใด
- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
7. ผลบวกของรากของสมการ $16^x - 6(4^x) + 8 = 0$ ตรงกับข้อใด
- 1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{7}{2}$ 4) 3

เฉลย

1. 2) 2. 1) 3. 2) 4. 1) 5. 3) 6. 4) 7. 1)

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เป็นอัตราส่วนที่เกี่ยวข้องกับด้านและมุมในสามเหลี่ยมมุมฉาก
พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉาก



พิจารณามุม A
จะเรียกด้าน BC ว่าด้านตรงข้ามมุม A
เรียกด้าน AC ว่าด้านประชิดมุม A
เรียกด้าน AB ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$$

ตารางค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

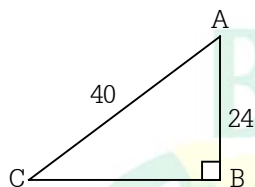
θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

สมบัติของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

1. $\sin \theta \operatorname{cosec} \theta = 1$
2. $\cos \theta \sec \theta = 1$
3. $\tan \theta \cot \theta = 1$
4. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
5. $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$
6. $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
7. $\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$
8. $\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$
9. $\tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$
10. $\cot (90^\circ - \theta) = \tan \theta$
11. $\sec (90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
12. $\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) = \sec \theta$

แบบทดสอบ

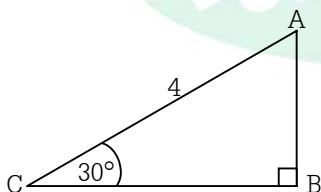
1.



จากรูป ค่าของ $\sin A + \cos A + \tan C$ เท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{43}{20}$
- 2) $\frac{45}{20}$
- 3) $\frac{20}{13}$
- 4) $\frac{24}{15}$

2.



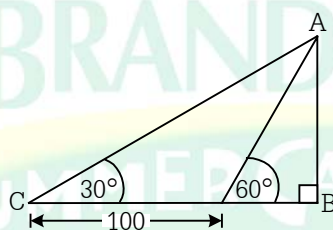
จากรูป ค่าของ $\sqrt{3} BC + 2AB$ เท่ากับข้อใด

- 1) 6
- 2) 8
- 3) 10
- 4) 12

3. ถ้า $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ค่าของ $2 \sin \theta \cos \theta$ เท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{5\sqrt{5}}{12}$
- 2) $\frac{5}{7}$
- 3) $\frac{1}{4}$
- 4) $\frac{3}{4}$

4. ถ้า $\sin 72^\circ = a$ ค่าของ $\cos^2 18^\circ + \tan^2 18^\circ$ เท่ากับข้อใด
 1) $\frac{1+a^2}{a^2}$ 2) $\frac{a^2}{1+a^2}$ 3) $\frac{a^2}{1-a^2}$ 4) $\frac{1-a^2}{a^2}$
5. ถ้า $\tan \theta + \cot \theta = 4$ ค่าของ $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta$ เท่ากับข้อใด
 1) 14 2) 12 3) 10 4) 8
6. แดงซึ่งมีความสูง 1.80 เมตร ยืนอยู่ริมหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 98.20 เมตร เมื่อเขามองไปยังเรือลำหนึ่งในทะเลโดยมุมก้มมีขนาด 60° เรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร
 1) 62.35 2) 54.25 3) 57.73 4) 68.42
7. ถ้า $\sec \theta - \tan \theta = 0.25$ ค่าของ $\sec \theta + \tan \theta$ เท่ากับข้อใด
 1) 0.75 2) 0.45 3) 4.5 4) 5
8. ถ้า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{9}{41}$ ค่าของ $\sec \theta + \cos \theta$ เท่ากับข้อใด
 1) $\frac{49}{41}$ 2) $\frac{50}{41}$ 3) $\frac{360}{2009}$ 4) $\frac{2009}{360}$
9. กำหนด $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\cot \theta = \frac{2}{5}$ แล้วค่าของ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ เท่ากับข้อใด
 1) $-\frac{1}{34}$ 2) $-\frac{7}{34}$ 3) $-\frac{16}{34}$ 4) -1
10. ถ้า $x^2 \sec^2 \frac{\pi}{3} - 3x \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + 2 \tan^2 \frac{\pi}{4} = 0$ แล้ว x มีค่าอยู่ในช่วงใด
 1) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ 2) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 3) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 4) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
- 11.



จากรูป BC เท่ากับข้อใด

- 1) $50\sqrt{3}$ 2) $75\sqrt{3}$ 3) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ 4) $50(\sqrt{3} + 1)$

เฉลย

1. 1) 2. 3) 3. 3) 4. 4) 5. 1) 6. 3) 7. 4) 8. 4) 9. 3) 10. 4)
 11. 1)



ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ คือ ฟังก์ชัน $f: I^+ \rightarrow R$ มักจะเขียนอยู่ในรูป $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
($f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$) หรือ $a_n = f(n)$

2. ชนิดของลำดับ

1. ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่อยู่ในรูป $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$ เรียก d ว่า ผลต่างร่วม $a_n = a_1 + (n - 1)d$ เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

2. ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อยู่ในรูป $a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$ เรียกว่า อัตราส่วนร่วม $a_n = a_1r^{n-1}$ เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

หมายเหตุ ลำดับที่มีจำนวนพจน์จำกัด a_1, a_2, \dots, a_n (มี n พจน์) เรียกว่า **ลำดับจำกัด** ลำดับที่มีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ (มีจำนวนพจน์ไม่สิ้นสุด) เรียกว่า **ลำดับอนันต์**

*ในคณิตศาสตร์ O-NET จะสนใจเฉพาะลำดับจำกัดและอนุกรมจำกัดเท่านั้น

3. อนุกรมของลำดับ a_1, a_2, \dots, a_n จะเขียนอยู่ในรูป $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ และเรียก $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ว่า ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

4. ชนิดของอนุกรมในคณิตศาสตร์ O-NET

1. อนุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมของลำดับเลขคณิตจะเขียนอยู่ในรูป

$$a_1 + (a_1 + d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d]$$

$$= \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$$

$$= \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

2. อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมของลำดับเรขาคณิตจะเขียนอยู่ในรูป

$$a_1, a_1r + \dots + a_1r^{n-1}$$

$$S_n = a_1, a_1r + \dots + a_1r^{n-1}$$

$$= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ex 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

*1) $-1, 3, -5, 7, \dots$

2) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$

3) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}$

4) $2, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2\sqrt{2}}, \dots$

วิธีทำ 1. มีเครื่องหมายบวก-ลบสลับกันโดยมีพจน์แรกเป็นลบ ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละพจน์เป็นเลขคี่เรียงติดกัน เริ่มจาก 1 ดังนั้น $a_n = (-1)^n(2n - 1)$

2. พิจารณา

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{3}{5}$$

$$a_3 = \frac{5}{7} \quad \text{ทั้งเศษและส่วนต่างเป็นเลขคี่เรียงติดกัน}$$

\vdots

โดยส่วนมากกว่าเศษอยู่ 2

ดังนั้น

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$$

3. พิจารณา

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{6} = \sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$a_3 = 3\sqrt{2} = \sqrt{2} (\sqrt{3})^2 \quad \text{เป็นลำดับเรขาคณิต}$$

\vdots

$$\text{มี } a_1 = \sqrt{2}, r = \sqrt{3}$$

ดังนั้น

$$a_n = \sqrt{2} (\sqrt{3})^{n-1}$$

4. พิจารณา

$$a_1 = 2 = 2^1$$

$$a_2 = 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{1/2} = 2^{1+1/2}$$

$$a_3 = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^1 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} = 2^{1+1/2+1/4}$$

\vdots

ทุกพจน์สามารถเขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากับ 2 มีเลขชี้กำลังอยู่ในรูปอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$a_n = 2^{1+1/2+1/2^2+\dots+1/2^{n-1}}$$

$$= 2^{(1-1/2^n)/1-1/2} = 2^{2(1-1/2^n)}$$

Ex 2 จำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 และ 6 ทหารลงตัวมีผลบวกเป็นเท่าใด

วิธีทำ จำนวนที่ต้องการหาผลบวกเป็นจำนวนที่หารด้วย ค.ร.น. ของ 9 และ 6 ลงตัว คือ เป็นจำนวนที่หารด้วย 18 ลงตัว

ดังนั้นผลบวกที่ต้องการ คือ $108 + 126 + 144 + \dots + 486$

ซึ่งเป็นอนุกรมเลขคณิตมี $a_1 = 108, a_n = 486$

จากสูตร

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$486 = 108 + (n-1) \times 18$$

$$n = 22$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{22}{2}(108 + 486)$$

$$= 6534$$



Ex 3 ในการเช่าซื้อบ้านหลังหนึ่ง โดยไม่ต้องจ่ายเงินดาวน์ ปีแรกผ่อนเดือนละ 10,000 บาท ปีที่สองเงินผ่อนลดลง 10% ปีที่สามเงินผ่อนลดลงอีก 10% ของปีที่สอง เป็นเช่นนี้ไปตลอด กำหนดเวลาผ่อน 10 ปี จงหาว่าผู้เช่าซื้อบ้านหลังนี้ต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าใด (กำหนด $0.9^{10} \approx 0.348678$)

วิธีทำ ปีแรก 12 เดือน ต้องผ่อนเดือนละ 10,000 บาท

ปีที่สอง 12 เดือน ต้องผ่อนเดือนละ $\frac{9}{10}(10,000) = 9,000$ บาท

ปีที่สาม 12 เดือน ต้องผ่อนเดือนละ $\frac{9}{10}(9,000) = 8,100$ บาท

รวมเงินผ่อน 10 ปี = $12[10,000 + 9,000 + 8,100 + \dots + 10 \text{ พจน์}]$

$$= 12 \left[\frac{10,000 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{10} \right)}{1 - \frac{9}{10}} \right] \text{อนุกรมเรขาคณิต } S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$= 12 \left[10,000 \times 10 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{10} \right) \right]$$

$$= 12[100,000(1 - (0.9)^{10})]$$

$$\approx 12[100,000(1 - 0.348678)]$$

$$\approx 12[100,000(0.651322)]$$

$$\approx 781,586.40 \text{ บาท}$$

Ex 4 จงหาผลบวก n พจน์ของอนุกรม $7 + 77 + 777 + \dots$

วิธีทำ

$$S_n = 7 + 77 + 777 + \dots n \text{ พจน์}$$

$$\frac{9}{7} S_n = 9 + 99 + 999 + \dots n \text{ พจน์}$$

$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots$$

$$= (10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n$$

$$= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n$$

$$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$$

$$S_n = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7}{9}n$$

แบบทดสอบ

- นาย ก เดินด้วยอัตราเร็ว 4 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อนาย ก ออกเดินทางไปได้ $2\frac{1}{2}$ ชั่วโมง นาย ข ก็ออกเดินตามด้วยอัตราเร็วที่เพิ่มขึ้นชั่วโมงละ $\frac{1}{2}$ กิโลเมตร ถ้าชั่วโมงแรกนาย ข เดินได้ 2 กิโลเมตร ขณะที่นาย ข เดินไปทันนาย ก นั้นนาย ข กำลังเดินด้วยอัตราเร็วเท่าใด
 - 1) $6\frac{1}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 2) $7\frac{1}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 3) 8 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 4) $8\frac{1}{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- นาย ก และนาย ข ออกเดินทางจากที่เดียวกันในเวลาเดียวกัน นาย ก เริ่มเดินทางด้วยอัตราเร็ว 2 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในชั่วโมงถัดไปนาย ก เดินทางด้วยอัตราเร็ว 4, 8, 16, ... กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ ส่วนนาย ข เริ่มเดินทางด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ในชั่วโมงถัดไปนาย ข เดินทางด้วยอัตราเร็ว 20, 10, 5, ... กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ นาย ก และนาย ข จะเดินทางไปทันกันหลังจากที่เดินทางไปได้กี่กิโลเมตร
 - 1) 76 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 2) 78 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 3) 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 - 4) 82 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
- กำหนดลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีผลบวกของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 7 เท่ากับ 13 และผลบวก 12 พจน์แรกเท่ากับ 104 ผลบวกของ 9 พจน์แรกเป็นเท่าใด
 - 1) $\frac{113}{4}$
 - 2) $\frac{117}{4}$
 - 3) $\frac{113}{2}$
 - 4) $\frac{117}{2}$
- ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีผลบวก 10 พจน์แรกเป็น 465 และ 9 เท่าของผลบวก 3 พจน์แรกเป็น 4 เท่าของผลบวก 6 พจน์แรก ผลบวก 8 พจน์แรกของลำดับนี้เป็นเท่าใด
 - 1) 336
 - 2) 338
 - 3) 348
 - 4) 360
- ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรกเป็น 1 และพจน์ที่ 2 พจน์ที่ 10 พจน์ที่ 34 เป็นลำดับเรขาคณิต พจน์ที่ 28 ของลำดับนี้มีค่าเท่าใด
 - 1) $8\frac{1}{3}$
 - 2) $9\frac{1}{3}$
 - 3) $9\frac{2}{3}$
 - 4) 10
- จำนวนจำนวนหนึ่งเมื่อนำไปบวกกับ 3, 20, 105 แล้วทำให้เกิดจำนวนใหม่เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต ผลบวกของ 6 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้มีค่าเท่าใด
 - 1) $16600\frac{1}{2}$
 - 2) $16600\frac{1}{4}$
 - 3) $15600\frac{1}{2}$
 - 4) $15600\frac{1}{4}$
- ถ้า a, b, c, d เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว $a^2 - 3b^2 + 3c^2 - d^2$ มีค่าเท่าใด
 - 1) 0
 - 2) a + b + c
 - 3) a - b + c
 - 4) b - a + c



8. ผลบวก n พจน์แรกของลำดับเลขคณิตสองลำดับเป็น $7n + 2 : n + 4$ อัตราส่วนของพจน์ที่ 5 ของสองลำดับนี้เป็นเท่าใด
- 1) 1 : 4 2) 1 : 5 3) 4 : 1 4) 5 : 1
9. กำหนดอนุกรม $1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots$ ผลบวก n พจน์แรกเท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{3n}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$ 2) $\frac{3n}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$
- 3) $\frac{3n}{4} - \frac{1}{4 \times 3^{n-1}}$ 4) $\frac{3n}{4} + \frac{1}{16 \times 3^{n-1}}$
10. กำหนดลำดับ (1, 2), (3, 4, 5, 6), (7, 8, 9, 10, 11, 12), ... ผลบวกของพจน์ในวงเล็บที่ n ของลำดับเป็นเท่าใด
- 1) $n(2n^2 - 1)$ 2) $n(2n^2 + 1)$ 3) $n(2n^2 - n + 1)$ 4) $n(2n^2 + n + 1)$
11. ถ้า $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็น 3 พจน์เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต และ a, c, b เป็นสามพจน์เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว ลำดับในข้อใดเป็นลำดับเลขคณิต
- 1) a, c, b 2) c, a, b 3) c, b, a 4) b, a, c
12. ข้อความใดกล่าวไม่ถูกต้อง
- 1) ถ้า a, b, c เป็นลำดับฮาร์มอนิกแล้ว $a(b + c), b(c + a), c(a + b)$ เป็นลำดับเลขคณิต
- 2) ถ้า a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว $b + c, c + a, a + b$ เป็นลำดับฮาร์มอนิก
- 3) ถ้า a, b, c เป็นลำดับฮาร์มอนิกแล้ว $a + c, a + b, a - 2b + c$ เป็นลำดับเรขาคณิต
- 4) ถ้า a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว $\log_e a, \log_e b, \log_e c$ เป็นลำดับเลขคณิต
13. ถ้าพจน์ที่ n ของอนุกรมหนึ่งเป็น $n^2 + 2^n$ ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเป็นเท่าใด
- 1) 1234 2) 2341 3) 2431 4) 2542
14. อนุกรมหนึ่งมีพจน์ที่ n เป็น $An + B2^n$ ถ้าพจน์แรกเป็น 5 พจน์ที่ 2 เป็น 18 ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้เป็นเท่าใด
- 1) $\frac{n}{2}(n + 1) + \frac{4}{3}(4^n - 1)$ 2) $\frac{n}{2}(n + 1) + 2(4^{2n} - 1)$
- 3) $\frac{n}{2}(n + 1) + \frac{2}{3}(4^n - 1)$ 4) $\frac{n}{2}(n + 1) + \frac{1}{3}(2^{2n} - 1)$
15. ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots$ เท่ากับข้อใด
- 1) 1320 2) 1330 3) 1340 4) 1360
16. ผลบวก n พจน์ของอนุกรม $\frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots$ เท่ากับข้อใด
- 1) $1 - \frac{1}{(n + 1)^2}$ 2) $1 - \frac{1}{n^2(n + 1)^2}$ 3) $1 + \frac{1}{(n + 1)^2}$ 4) $1 + \frac{1}{n^2(n + 1)^2}$

17. กำหนดลำดับเรขาคณิต 2, 6, 18, ... พจน์ที่เล็กที่สุดและมากกว่า 1000 มีค่าเท่ากับข้อใด
 1) 729 2) 1458 3) 2187 4) 4374
18. ผลบวกของจำนวนคู่ระหว่าง 1 และ 1001 ที่หารด้วย 3 และ 7 ลงตัวเท่ากับข้อใด
 1) 83166 2) 35784 3) 11592 4) 10442
19. กำหนดให้ $S_n = 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n$
 ดังนั้น $S_n - 3S_n$ เท่ากับข้อใด
 1) $\frac{1}{4} [1 - (1 - 2n) \cdot 3^n]$ 2) $\frac{1}{4} [1 - (1 + 2n) \cdot 3^n]$
 3) $\frac{3}{2} [1 - (1 - 2n) \cdot 3^n]$ 4) $\frac{3}{2} [(1 - 2n) \cdot 3^n - 1]$

เฉลย

1. 2) 2. 2) 3. 4) 4. 3) 5. 4) 6. 1) 7. 1) 8. 4) 9. 1) 10. 2)
 11. 4) 12. 3) 13. 3) 14. 1) 15. 2) 16. 1) 17. 2) 18. 3) 19. 4)

ความน่าจะเป็น

1. **หลักการนับเบื้องต้น** ในการทำงานที่มีขั้นตอนทั้งหมด k ขั้นตอน ขั้นตอนที่ 1 สามารถเลือกทำได้ n_1 วิธี ขั้นตอนที่ 2 สามารถเลือกทำได้ n_2 วิธี, ... , ขั้นตอนที่ k เลือกทำได้ n_k วิธี จะได้ว่าจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะสามารถทำงานนี้จะเท่ากับ $n_1 n_2 \dots n_k$ วิธี

2. จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับของ r สิ่ง จากของ n สิ่งที่แตกต่างกันหมด

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

3. จำนวนวิธีที่จะจัดลำดับของทั้ง n สิ่งโดยมีของที่ซ้ำกัน k กลุ่ม กลุ่มที่ 1 n_1 สิ่ง กลุ่มที่ 2 n_2 สิ่ง ... กลุ่มที่ k n_k สิ่ง

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

4. จำนวนวิธีที่จะเลือกของ r สิ่งจากของทั้งหมด n สิ่ง

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

5. จำนวนวิธีเรียงสิ่งของ n สิ่งเป็นวงกลม

$$= (n-1)!$$



*ในกรณีมีของซ้ำ k กลุ่ม กลุ่มละ n_1, n_2, \dots, n_k จะเรียงเป็นวงกลมได้ = $\frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ การใช้สูตรนี้
 ถ้าค่าที่คำนวณได้เป็นทศนิยมให้ปัดขึ้น เช่น เรียงตัวอักษร a, a, a (3 สิ่งซ้ำกันหมด) จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ
 $\frac{(3-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$ ปัดเป็น 1 วิธี

6. จำนวนวิธีในการแบ่งสิ่งของ n สิ่งออกเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ n_1, n_2, \dots, n_k โดยจำนวนสิ่งของในแต่ละ
 กลุ่มไม่เท่ากันเลย จะได้ = $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

*มีของ 10 สิ่ง แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3, 3, 4 (มีจำนวนของเท่ากัน 2 กลุ่ม)

$$\text{จำนวนวิธีแบ่ง} = \frac{10!}{(3!)(3!)(4!)}$$

มีจำนวนของเท่ากัน 2 กลุ่ม **ต้องการด้วย 2!** สรุปแบ่งสิ่งของ n สิ่งออกเป็น $\frac{m, m, \dots, m}{r_1}$ ตัว (กลุ่มละ m r_1
 กลุ่ม) และ $\frac{l, l, \dots, l}{r_2}$ ตัว (กลุ่มละ l r_2 กลุ่ม)

$$\text{จะได้จำนวนวิธีแบ่ง} = \frac{n!}{(m^{r_1})^{r_1} (r_1!) (l^{r_2})^{r_2} (r_2!)}$$

7. การทดลองสุ่ม คือ การกระทำที่เกิดผลลัพธ์ และไม่สามารถคาดคะเนผลลัพธ์ที่จะเกิดในแต่ละครั้งได้
 เช่น การโยนเหรียญ, โยนลูกเต๋า, ดึงไฟจากสวิตช์ ฯลฯ จากการทดลองสุ่มจะมี

7.1 แซมเปิลสเปซ คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่ม ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ 2
 เหรียญหนึ่งครั้งจะได้

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

7.2 เหตุการณ์ (Event) คือ ซับเซตของแซมเปิลสเปซ เช่น เหตุการณ์ที่เหรียญหงายหัวหนึ่งเหรียญ
 ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญหนึ่งครั้ง

$$E = \{HT, TH\}$$

7.3 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ $E(E')$

$$E' = S - E$$

7.4 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E(P(E))$

$$P(E) = \frac{nE}{nS}$$

เมื่อทุกผลลัพธ์ในการทดลองสุ่มมีโอกาสเกิดเท่าๆ กัน

คุณสมบัติเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$ (S คือ เหตุการณ์ที่เกิดแน่ๆ เพราะไม่ว่าผลลัพธ์จะเป็นอะไรก็ตามผลลัพธ์นั้นย่อมเป็นสมาชิกของ S)
3. $P(E') = 1 - P(E)$
4. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
 $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$
5. $P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

Ex 1 ลูกโป่งหนึ่งมีลูกท้ออยู่ 6 คู่ หยิบลูกท้อ 4 ข้างออกจากลูกอย่างสุ่มๆ จงหาจำนวนวิธีที่จะได้ลูกท้อ 4 ข้างที่ไม่เป็นคู่เดียวกันเลย

วิธีทำ 1. เลือกลูกท้อ 4 คู่จาก 6 คู่ ได้ $C_{(6, 4)}$ วิธี

2. แต่ละคู่เลือกมา 1 ข้าง ได้ 2^4 วิธี

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ต้องการ} &= C_{(6, 4)} \cdot 2^4 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 2^4 \text{ วิธี} \\ &= 240 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

Ex 2 มีตัวอักษรที่ทำด้วยพลาสติกอยู่ 13 ตัว คือ

i 3 ตัว j 4 ตัว b 3 ตัว m 2 ตัว n 1 ตัว

จงหาจำนวนวิธีสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัว ในแบบต่างๆ กันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จะต้องแบ่งเป็น กรณี

1. ซ้ำ 4 ตัว มีได้ 1 วิธี jjjj

2. ซ้ำ 3 ตัว ต่าง 1 ตัว

1) ซ้ำ 3 ตัว ได้จากเลือก 1 ชุดจาก 3 ชุดได้ $C_{(3, 1)}$ วิธี (i (3 ตัว) j (3 ตัว) b (3 ตัว))

2) เลือกอีกตัวจาก 4 ตัว (ที่ต่างกัน) ที่เหลือได้ $C_{(4, 1)}$ วิธี

3) นำ 4 ตัวอักษรที่ได้มาเรียงเป็นคำได้อีก $\frac{4!}{3!}$ วิธี

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นกรณีนี้จะทำได้ทั้งหมด} &= C_{(3, 1)}C_{(4, 1)} \frac{4!}{3!} \text{ วิธี} \\ &= \frac{3 \times 4 \times 4!}{3!} \\ &= 48 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

3. ซ้ำ 2 ตัว , ซ้ำ 2 ตัว

1) เลือก 2 ชุด จาก 4 ชุด (i 2 ตัว, j 2 ตัว b 2 ตัว m 2 ตัว) ได้ = $C_{(4, 2)}$ วิธี

2) เรียงตัวอักษร ได้ $\frac{4!}{2!2!}$ วิธี

$$\text{กรณีนี้จะทำได้ทั้งหมด} = C_{(4, 2)} \times \frac{4!}{2!2!} = 36 \text{ วิธี}$$

4. ซ้ำ 2 ตัว ต่าง 2 ตัว

1) เลือก 1 ชุด จาก 4 ชุด (i 2 ตัว j 2 ตัว b 2 ตัว m 2 ตัว) ได้ = $C_{(4, 1)}$

2) เลือก 2 ตัวจาก 4 ตัวที่เหลือได้ = $C_{(4, 2)}$

3) เรียงตัวอักษรได้ $\frac{4!}{2!}$

$$\begin{aligned} \text{กรณีนี้จะได้วิธีทั้งหมด} &= C_{(4, 1)}C_{(4, 2)} \frac{4!}{2!} \\ &= 4 \times 6 \times 12 \\ &= 288 \text{ วิธี} \end{aligned}$$



5. ต่างหมด

กรณีนี้คือการจัดลำดับตัวอักษร 4 ตัวจาก 5 ตัว (i, j, b, m, n)

$$= P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 5!$$

$$= 120 \text{ วิธี}$$

$$\text{ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด} = 1 + 48 + 36 + 288 + 120$$

$$= 485 \text{ วิธี}$$

Ex 3 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนห้องหนึ่ง พบว่าโอกาสที่จะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ $\frac{3}{5}$ โอกาสที่จะสอบผ่านวิชาฟิสิกส์เท่ากับ $\frac{4}{5}$ และโอกาสที่จะสอบผ่านอย่างมาก 1 วิชาเท่ากับ $\frac{7}{15}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่จะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่จะสอบผ่านวิชาฟิสิกส์

โอกาสที่จะสอบผ่านอย่างมาก 1 วิชา หมายถึง ไม่มีโอกาสที่จะสอบผ่าน 2 วิชา

$$1 - P(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{15}$$

$$\therefore P(E_1 \cap E_2) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\text{โอกาสที่จะสอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา} = P(E_1 \cup E_2)$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{8}{15} = \frac{9+12-8}{15}$$

$$= \frac{13}{15}$$

Ex 4 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าที่หงายจะมีค่ามากกว่า 3 ขึ้นไป

วิธีทำ ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของหน้าที่หงายมีค่ามากกว่า 3 ขึ้นไป

จะได้

$$E' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$nE' = 3$$

$$nS = 6 \times 6 = 36$$

$$P(E') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

แบบทดสอบ

- ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้ายมีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลง โดยเลือกจากเพลงทั้งหมด 5 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คนเลือกร้องเพลงเดียวกัน เท่ากับข้อใด
1) $\frac{8}{25}$ 2) $\frac{9}{25}$ 3) $\frac{12}{25}$ 4) $\frac{13}{25}$
- มีลูกแก้ว 7 ลูก ซึ่งมีสีต่างกันหมด โดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จำนวนวิธีที่จะวางเรียงลูกแก้วเป็นวงกลมโดยให้สีน้ำเงินเรียงอยู่ติดกับสีขาวและติดกับสีแดงเท่ากับข้อใด
1) 24 2) 48 3) 120 4) 240
- ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใด
1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{31}{36}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{5}{36}$
- ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักให้แต้มคู่แต่ละหน้ามีโอกาสเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของแต้มคี่แต่ละหน้า ความน่าจะเป็นที่โยนลูกเต๋า 1 ครั้ง ได้แต้มเป็น 1 หรือแต้มคู่ เท่ากับข้อใด
1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{7}{9}$ 4) $\frac{5}{8}$
- ในการแข่งขันฟุตบอล คณะกรรมการจัดการแข่งขันจัดให้มีการแข่งขันแบบพบกันหมด ปรากฏว่าจะต้องจัดให้มีการแข่งขันทั้งหมด 36 คู่ การแข่งขันนี้มีทีมเข้าร่วมแข่งขันจำนวนเท่ากับข้อใด
1) 6 2) 8 3) 9 4) 12
- ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A' \cap B') = 0.2$ แล้ว $P(A \cap B)$ เท่ากับข้อใด
1) 0.1 2) 0.3 3) 0.8 4) 0.9
- ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ปรากฏว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ และ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาเคมี ถ้าความน่าจะเป็นของนักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้จะสอบผ่านอย่างมากที่สุดหนึ่งวิชาเป็น $\frac{4}{5}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับข้อใด
1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{15}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{13}{15}$
- สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1-10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีแต้มรวมกันเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5 มีค่าเท่ากับข้อใด
1) $\frac{1}{60}$ 2) $\frac{1}{40}$ 3) $\frac{1}{30}$ 4) $\frac{1}{20}$



9. ในการเลือกกรรมการนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 4 คน และหญิง 2 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{7}{15}$ 2) $\frac{8}{15}$ 3) $\frac{9}{15}$ 4) $\frac{10}{15}$
10. กล้องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก นาย ก และนาย ข ผลัดกันหยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนไปเรื่อยๆ และหยุดเมื่อมีใครคนหนึ่งหยิบได้ลูกบอลสีแดง ถ้านาย ก หยิบลูกบอลเป็นคนแรก แล้วความน่าจะเป็นที่นาย ก จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงเท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{2}{7}$ 2) $\frac{5}{7}$ 3) $\frac{3}{8}$ 4) $\frac{5}{8}$
11. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1-10 กำกับ ถ้าต้องการหยิบสลาก 8 ใบพร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากดังกล่าวมีค่าเท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{2}{9}$ 2) $\frac{8}{15}$ 3) $\frac{2}{35}$ 4) $\frac{11}{156}$
12. ลูกบาศก์หนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกันอยู่ 10 ลูก เป็นสีแดง 3 ลูก สีขาว 5 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงสองครั้ง ครั้งละลูกโดยไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกที่สองเป็นสีแดงเท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{3}{10}$ 3) $\frac{27}{100}$ 4) $\frac{33}{100}$
13. ในการยื่นเรียงเป็นแถวตรงของนักเรียนชาย 6 คน และนักเรียนหญิง 4 คน ถ้าความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนหญิงสองคนใดยืนติดกันเลยเท่ากับ a และความน่าจะเป็นที่นักเรียนหญิงทั้งหมดต้องยืนติดกันเท่ากับ b แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใด
- 1) 0.20 2) 0.25 3) 0.30 4) 0.35
14. กล้องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 3 สี เป็นสีขาว 4 ลูก สีแดงและสีเขียวมีจำนวนเท่ากัน เมื่อสุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาวทั้ง 2 ลูก เท่ากับ $\frac{2}{15}$ ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้วมา 4 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วเป็นสีเขียว 1 ลูก และสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{30}{70}$ 2) $\frac{31}{70}$ 3) $\frac{29}{35}$ 4) $\frac{33}{35}$
15. จัดคน 8 คน ซึ่งมีสมศักดิ์ สมชาย และสมหญิง รวมอยู่ด้วย เข้านั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 8 ที่นั่ง ความน่าจะเป็นที่สมชายได้นั่งติดกับสมหญิง และสมศักดิ์ไม่นั่งติดกับสมชาย เท่ากับข้อใด
- 1) $\frac{1}{7}$ 2) $\frac{5}{21}$ 3) $\frac{11}{42}$ 4) $\frac{5}{42}$

เฉลย

1. 4) 2. 2) 3. 4) 4. 3) 5. 3) 6. 2) 7. 1) 8. 1) 9. 3) 10. 2)
 11. 2) 12. 2) 13. 1) 14. 2) 15. 2)

สถิติ

เป้าหมายของการทำงานทางสถิติ คือ การหาค่าของคุณสมบัติ โดยรวมบางประการของกลุ่ม คน, สัตว์, สิ่งของที่เราสสนใจ (**ประชากร**) เช่น เราต้องการทราบว่านักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีความสามารถในการเรียน **วิชาคณิตศาสตร์**เป็นอย่างไร ในที่นี้ความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนของโรงเรียนนี้ ก็คือ **คุณสมบัตินี้ที่เราสนใจ** แต่เราไม่ได้สนใจคุณสมบัติอื่นนี้ของนักเรียนคนใดคนหนึ่ง เราสนใจคุณสมบัติโดยรวม (หรือโดยเฉลี่ยนั่นเอง) องค์ประกอบเบื้องต้นของการทำงานทางสถิติก็คือ

1. รู้ว่ากรณีนี้**ประชากร**ก็คือเซตของนักเรียนทุกคนในโรงเรียนนี้
2. จะวัดค่าความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยอะไร

วิธีง่ายๆ ก็คือใช้คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนเป็นค่าวัดความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในที่นี้**ข้อมูล**ก็คือคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ถ้าต้องการคำนวณจากประชากรโดยตรง ข้อมูล ก็คือ เซตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทุกคน ถ้าต้องการคำนวณจากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมา **ข้อมูล**ก็คือเซตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ถูกสุ่มขึ้นมา ที่เก็บมาทั้งหมดนี้เพื่อต้องการให้นักเรียนเข้าใจพื้นฐานที่เป็นรูปธรรมของ**การทำงานทางสถิติ**

จะเห็นว่าคุณสมบัติโดยรวมของประชากรที่ได้ยกตัวอย่างให้เห็นเป็นรูปธรรมนั้นมีประโยชน์มาก ในการพัฒนาสังคมในทุกกลุ่มตั้งแต่องค์กรต่างๆ ประเทศชาติถึงระดับโลก เพราะเราอาจจะใช้วิชาสถิติคำนวณหาคุณสมบัติโดยรวมเกี่ยวกับสุขภาพของประชาชน, ความสามารถในการประกอบธุรกิจ ฯลฯ เพื่อจะนำมาปรับปรุงแก้ไข พัฒนาสังคมของเราให้เจริญรุ่งเรืองและสงบสุขอย่างยั่งยืน อย่างไรก็ตามวิชาสถิติที่เราจะศึกษาในชั้นนี้เป็นเพียงวิชาสถิติเบื้องต้นเท่านั้น ยังมีความรู้ในวิชาสถิติอีกมากมายที่เราจะสามารถเรียนได้ในมหาวิทยาลัย

1. ขบวนการทำงานทางสถิติประกอบด้วย
 1. การเก็บรวบรวมข้อมูล
 2. การนำเสนอข้อมูล
 3. การวิเคราะห์ข้อมูล
 4. การตีความ

ข้อมูลทางสถิติอาจแบ่งเป็น 2 ลักษณะใหญ่ๆ

1. ข้อมูลเชิงปริมาณ คือ ข้อมูลที่มีลักษณะเป็นตัวเลข เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับอายุ, รายได้, คะแนนสอบ

ฯลฯ

*ข้อมูลประเภทนี้นำไปคำนวณหาค่า \bar{X} หรือมัธยฐานได้

2. ข้อมูลเชิงคุณภาพ คือ ข้อมูลที่มีลักษณะเป็นนามธรรม เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับ เพศ, ชื่อสินค้า, คุณภาพของสินค้า เป็นต้น

*ข้อมูลประเภทนี้ใช้หาค่า**ฐานนิยม**

ค่าทางสถิติ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (\bar{X})

กรณีข้อมูลเดี่ยว x_1, x_2, \dots, x_N

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

*กรณีนี้ค่า \bar{X} ที่คำนวณได้ คำนวณจากข้อมูลที่แท้จริงทุกตัว

กรณีข้อมูลจากตารางแจกแจงความถี่

Ex 1

คะแนน	ค่ากึ่งกลาง (x_i)	ความถี่ (f_i)
1-10	$\frac{1+10}{2} = 5.5$	$f_1 = 2$
11-20	$\frac{11+20}{2} = 15.5$	$f_2 = 4$
21-30	$\frac{21+30}{2} = 25.5$	$f_3 = 8$
31-40	$\frac{31+40}{2} = 35.5$	$f_4 = 5$
41-50	$\frac{41+50}{2} = 45.5$	$f_5 = 1$
		$N = f_1 + f_2 + \dots + f_k = 20$

วิธีตรง

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_k X_k}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

$$= \frac{2(5.5) + 4(15.5) + 8(25.5) + 5(35.5) + 1(45.5)}{20}$$

*ค่ากึ่งกลาง $x_i = \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$ ในแต่ละอันตรภาคชั้น

วิธีลัด ทอนค่า x_i โดย $d_i = \frac{X_i - A}{I}$ (A เป็นตัวกลางสมมติเลือกจากค่ากึ่งกลาง x_i ในชั้นใดก็ได้ มักจะเลือกจากชั้นที่มีความถี่สูงสุด)

คะแนน	x_i	f_i	d_i	$f_i d_i$
1-10	5.5	2	-2	-4
11-20	15.5	4	-1	-4
21-30	25.5 = A	8	0	0
31-40	35.5	5	1	5
41-50	45.5	1	2	2
				$\Sigma f_i d_i = -1$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i d_i}{N} = \frac{-1}{20}$$

$$\bar{X} = A + I \bar{d} = 25.5 + 10 \left(\frac{-1}{20} \right)$$

$$= 25$$

ค่าสถิติที่เกี่ยวกับการเรียงลำดับคะแนนในข้อมูลเชิงปริมาณ

1. ข้อมูลเดี่ยว x_1, x_2, \dots, x_N (เรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมาก)

$$X_{i+\Delta i} = X_i + \Delta i (X_{i+1} - X_i) \quad (0 < \Delta i < 1)$$

ตัวอย่าง 3, 5, 9, 13, 17, 20, 25, 30

$$\begin{aligned} X_{3.25} &= X_3 + 0.25(X_4 - X_3) \\ &= 9 + 0.25(13 - 9) \\ &= 9 + 0.25(4) \\ &= 10 \end{aligned}$$

2. ข้อมูลจากตารางแจกแจงความถี่

คะแนน	f_i	ความถี่สะสม f_i	
1-10	2	2	$X_2 = 10.5$
11-20	5	7	$X_7 = 20.5$
21-30	8	15	$X_{15} = 30.5$
31-40	3	18	$X_{18} = 40.5$
41-50	2	20	$X_{20} = 50.5$

จากการหาค่า \bar{X} จากตารางแจกแจงความถี่ นักสถิติให้ถือว่าคะแนนทุกตัวในแต่ละอันตรภาคชั้นมีค่าเท่ากันเท่ากับจุดกึ่งกลางคะแนน

แต่ในการหาค่าสถิติที่เกี่ยวกับการเรียงลำดับคะแนน นักสถิติให้ถือว่าค่าของคะแนนที่มีตำแหน่งตรงกับความถี่สะสมในอันตรภาคชั้นนั้นจะมีค่าเท่ากับขีดจำกัดบนของคะแนนในอันตรภาคชั้นนั้น ดังจะเห็นจากตารางในตัวอย่างข้างบน ถ้าต้องการคะแนนในตำแหน่งอื่นให้เทียบบัญญัติไตรยางค์

*ในวิชาสถิติ 'ค่าสถิติที่คำนวณจากตารางแจกแจงความถี่จะเป็นค่าโดยประมาณทั้งสิ้น' และในการหาค่าสถิติแต่ละค่าอาจจะมีหลักในการประมาณต่างกัน

ฐานนิยม คือ คะแนนตัวที่มีความถี่สูงสุด

- ในข้อมูลเดียว**
- 3, 5, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 15 ฐานนิยม = 5
 - 3, 7, 10, 10, 10, 15, 20, 23, 23, 23, 30, 30, 35
ฐานนิยมมี 2 ค่า คือ 10 กับ 23
 - 5, 5, 5, 9, 9, 9, 13, 13, 13
ไม่มีค่าฐานนิยม เพราะคะแนนแต่ละค่ามีความถี่เท่ากันทุกตัว

ในข้อมูลจากตารางแจกแจงความถี่

ตัวอย่าง

คะแนน	f_i
1-10	5
11-20	7
21-30	15
31-40	8
41-50	5

*ในตารางแจกแจงความถี่ที่เรียงคะแนนจากน้อยไปมาก นักสถิติให้ประมาณว่าฐานนิยมเป็นคะแนนที่อยู่ในอันดับภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด โดย**ฮิสโตแกรม** เราจะได้สูตรสำเร็จในการคำนวณหาค่าฐานนิยม (Mode)

$$\text{Mode} = L + I \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

L คือ ขีดจำกัดล่างของอันดับภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด ($L = 20.5$)

I คือ ความกว้างของอันดับภาคชั้น ($I = 10$)

Δ_1 คือ ผลต่างระหว่างความถี่ของอันดับภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของอันดับภาคชั้นก่อนชั้นที่มีความถี่สูงสุด ($\Delta_1 = 15 - 7 = 8$)

Δ_2 คือ ผลต่างระหว่างความถี่ของอันดับภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุดกับความถี่ของอันดับภาคชั้นถัดลงมา ($\Delta_2 = 15 - 8 = 7$)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น Mode} &= 20.5 + 10 \left(\frac{8}{8+7} \right) \\ &= 20.5 + \frac{80}{15} = 25.8 \end{aligned}$$

ในการหาค่าคะแนนเมื่อทราบตำแหน่ง (i)

$$\text{จะได้ } X_i = L + \frac{I(i - F_L)}{f_i}$$

i เป็นตำแหน่งของคะแนนที่ต้องการ

L เป็นขีดจำกัดล่างของคะแนนที่ X_i อยู่

I เป็นความกว้างของอันดับภาคชั้นของชั้นที่ X_i อยู่

F_L เป็นความถี่สะสมของชั้นก่อนชั้นที่ X_i อยู่

f_i เป็นความถี่ของชั้นที่ X_i อยู่

เช่น ต้องการหาค่า X_{15} , X_{12}

1. $X_{15} = 30.5$ (อ่านจากตารางแจกแจงความถี่ได้เลย)

2. X_{12} อยู่ในอันดับที่ 3

$$i = 12, L = 20.5, I = 10, F_2 = 7, f_i = 8$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= 20.5 + \frac{10(12 - 7)}{8} \\ &= 20.5 + 6.25 \\ &= 26.75 \end{aligned}$$

มัธยฐาน คือ คะแนนตัวอยู่กึ่งกลางหลังจากเรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมาก

ในกรณีข้อมูลเดี่ยว x_1, x_2, \dots, x_N

1. ถ้า N เป็นเลขคี่จะมีคะแนนที่อยู่กึ่งกลางเพียงตัวเดียว คือ $X_{\frac{N+1}{2}}$ ($\frac{N+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มบวก) เช่น

$$N = 21$$

$$\text{มัธยฐาน} = X_{\frac{21+1}{2}} = X_{11}$$

2. ถ้า N เป็นเลขคู่จะมีคะแนนที่อยู่กึ่งกลาง 2 ตัว คือ $X_{\frac{N}{2}}$ กับ $X_{\frac{N}{2}+1}$

$$\text{มัธยฐาน} = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

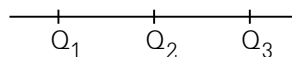
$$\text{เช่น } N = 20 \quad \text{มัธยฐาน} = \frac{X_{\frac{20}{2}} + X_{\frac{20}{2}+1}}{2} = \frac{X_{10} + X_{11}}{2}$$

เปอร์เซ็นต์ไทล์ คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่ากันหลังจากเรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมากจะมีตัวแบ่ง 99 ตัว P_1, P_2, \dots, P_{99}



เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ k (P_k) คือ คะแนนตัวที่มีจำนวนคะแนนที่มีค่าน้อยกว่ามันอยู่ k ตัว หลังจากที่ยังแบ่งคะแนนออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน

ควอร์ไทล์ คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน หลังจากเรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมาก มีตัวแบ่ง 3 ตัว Q_1, Q_2, Q_3



เดซิส์ คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน หลังจากเรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมาก มีตัวแบ่ง 9 ตัว $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$



ตัวอย่างที่ 1 จากข้อมูล 3, 7, 9, 12, 15, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40 จงหา

1. มัธยฐาน
2. $P_{27.5}$
3. Q_3
4. $D_{3.5}$

ในการหา P_k ในข้อมูลเดียว ตำแหน่งของ P_k ในข้อมูล $i = \frac{N+1}{100} k$

ในการหา Q_k ในข้อมูลเดียว ตำแหน่งของ Q_k ในข้อมูล $i = \frac{N+1}{4} k$

ในการหา D_k ในข้อมูลเดียว ตำแหน่งของ D_k ในข้อมูล $i = \frac{N+1}{10} k$

$$1. \text{ มัธยฐาน} = \frac{X_{\frac{12}{2}} + X_{\frac{12}{2}+1}}{2} \quad (N = 12)$$

$$= \frac{X_6 + X_7}{2} = \frac{20 + 23}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

$$2. P_{27.5}$$

$$i = \frac{12+1}{100} \times (27.5) = \frac{13 \times 27.5}{100} = 3.575$$

$$P_{27.5} = X_3 + (X_4 - X_3) \times (0.575)$$

$$= 9 + (12 - 9) \times (0.575)$$

$$= 9 + 1.725 = 10.725$$

$$3. Q_3$$

$$i = \frac{13}{4} \times 3 = 9.75$$

$$Q_3 = X_9 + (X_{10} - X_9) \times 0.75$$

$$= 30 + (34 - 30) \times 0.75$$

$$= 30 + 4 \times 0.75 = 33$$

$$4. D_{3.5}$$

$$i = \frac{13}{10} \times 3.5 = 4.55$$

$$D_{3.5} = X_4 + (X_5 - X_4) \times 0.55$$

$$= 12 + (15 - 12) \times 0.55$$

$$= 12 + 1.65 = 13.65$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตารางแจกแจงความถี่

คะแนน	ความถี่
11-20	5
21-30	7
31-40	10
41-50	5
51-60	3

จงหาค่าของ

- 1) มัธยฐาน
- 2) P_{35}
- 3) Q_1
- 4) D_7

วิธีทำ

คะแนน	f	F
11-20	5	5
21-30	7	12
31-40	10	22
41-50	5	27
51-60	3	30

ในการคำนวณจากตารางแจกแจงความถี่

- 1) มัธยฐาน $i = \frac{N}{2}$
- 2) $P_k, i = \frac{k}{100} N$
- 3) $Q_k, i = \frac{k}{4} N$
- 4) $D_k, i = \frac{k}{10} N$

มัธยฐาน $i = \frac{30}{2} = 15 \quad (N = 30)$

มัธยฐานอยู่ในอันตรภาคชั้นที่ 3

$$\begin{aligned} \text{มัธยฐาน} &= X_{15} = 30.5 + \frac{10(15 - 12)}{10} \\ &= 33.5 \end{aligned}$$

$P_{35} \quad i = \frac{35}{100} (30) = 10.5$

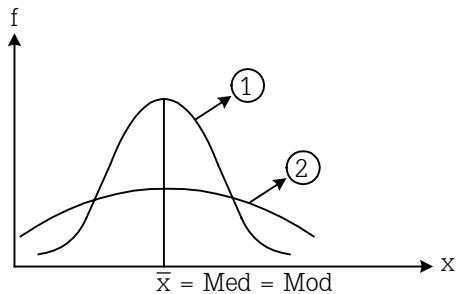
P_{35} อยู่ในอันตรภาคชั้นที่ 2

$$\begin{aligned} P_{35} &= X_{10.5} = 20.5 + \frac{10(10.5 - 5)}{7} \\ &= 28.35 \end{aligned}$$

การวัดการกระจาย ข้อมูลที่มีค่าของคะแนนแตกต่างกันน้อย เราเรียกว่าข้อมูลนั้นมีการกระจายน้อย ถือเป็นข้อมูลที่มี**คุณภาพดี** ในขณะที่ข้อมูลที่มีค่าของคะแนนแตกต่างกันมาก เราเรียกว่าข้อมูลนั้นมีการกระจายมาก ถือว่าเป็นข้อมูลที่มี**คุณภาพไม่ดี** เพราะครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ย่อมต้องการเข้าสอนห้องเรียนที่มีค่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันมาก มากกว่าห้องเรียนที่มีค่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันมาก

ลักษณะเส้นโค้งความถี่

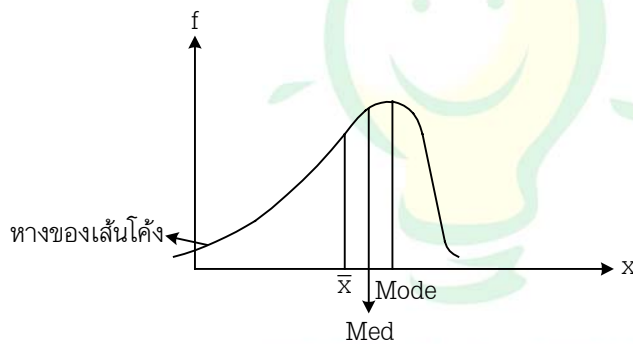
1. เส้นโค้งความถี่ปกติ คือ เส้นโค้งความถี่ที่มีลักษณะเป็นรูปประฆังเป็นเส้นโค้งที่มีแกนสมมาตรเป็นเส้นตั้ง



จะเห็นว่าเส้นโค้ง ① มีการกระจายน้อยกว่าเส้นโค้งที่ ②

*ในเส้นโค้งความถี่ปกติข้อมูลที่เส้นโค้งความถี่โด่งกว่าจะเป็นข้อมูลที่มีคุณภาพดีกว่า

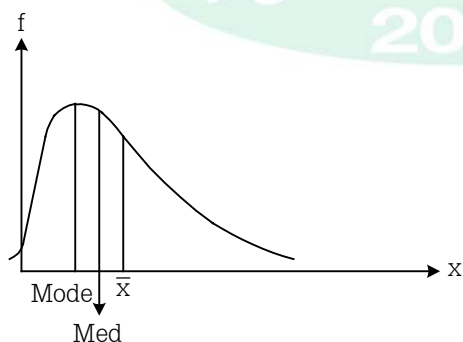
2. เส้นโค้งเบ้ซ้าย



*1. ในเส้นโค้งชนิดนี้ ถ้าพิจารณาระหว่าง \bar{x} , Med, Mode \bar{x} จะอยู่ข้างซ้ายสุด Mode อยู่ข้างขวาสุด Med จะอยู่ระหว่าง \bar{x} กับ Mode และ $Mode - \bar{x} = 3(Med - \bar{x})$

2. Med จะแบ่งพื้นที่ใต้เส้นโค้งออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆ กัน

3. เส้นโค้งเบ้ขวา



\bar{x} อยู่ขวาสุด Mode อยู่ซ้ายสุด Med อยู่ระหว่าง Mode กับ \bar{x} และ $\bar{x} - Mode = 3(\bar{x} - Med)$

การวัดการกระจายแบบสัมบูรณ์ เป็นการวัดการกระจายของข้อมูลชุดเดียวว่ามีการกระจายมากหรือกระจายน้อย โดยไม่เปรียบเทียบกับข้อมูลชุดอื่น จะมีตัววัดการกระจายดังต่อไปนี้

1. พิสัย = $X_{\max} - X_{\min} = R$

2. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = Q.D.$

3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย M.D. = $\frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N}$

4. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

$$* \sum_{i=1}^N x_i^2 = N(\bar{x}^2 + S.D.^2)$$

*มีข้อสังเกตที่น่าสนใจ

1. $\sum_{i=1}^N (x_i - A)^2$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $A = \bar{x}$

2. $\sum_{i=1}^N |x_i - A|$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $A = \text{Med}$

3. ถ้ามีข้อมูล 2 ชุด ซึ่งมีจำนวนเท่ากัน

ชุดที่ 1 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$

ชุดที่ 2 $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N$

มีสมการความสัมพันธ์ $y_i = Ax_i + B$ จะได้ว่า

3.1 $\bar{y} = A\bar{x} + B$

3.2 $\text{Med}_y = A\text{Med}_x + B$

3.3 $\text{Mode}_y = A\text{Mode}_x + B$

3.4 $R_y = |A|R_x$

3.5 $Q.D._y = |A|Q.D._x$

3.6 $M.D._y = |A|M.D._x$

3.7 $S.D._y = |A|S.D._x$

การวัดการกระจายแบบสัมพัทธ์ มีตัววัดการกระจายดังต่อไปนี้

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย = $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}}$
2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = $\frac{M.D.}{\bar{x}}$
4. สัมประสิทธิ์ของความแปรผัน = $\frac{S.D.}{\bar{x}}$

*ตัววัดการกระจายเหล่านี้ใช้ในการเปรียบเทียบการกระจายระหว่างข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุดขึ้นไป

แบบทดสอบ

ตอนที่ 1 : จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. กำหนดตารางการแจกแจงความถี่ของข้อมูล 32 จำนวนเป็นดังนี้

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
0-2	6	6
3-5	a	18
6-8	b	c
9-11	4	28
12-14	4	32

โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก
ควอร์ไทล์ที่ 3 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 4 จำนวน เรียงจากน้อยไปมากดังนี้

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \quad \text{โดยที่ } x_1 = 3$$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่ามัธยฐานเท่ากับฐานนิยม เท่ากับ 5 และ $\sum_{i=1}^4 (x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ a = 5.5 แล้ว

สัมประสิทธิ์ของพิสัยของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 10 คน ซึ่งมีประสิทธิ์และประสงครวมอยู่ด้วย เป็นดังนี้

ประสิทธิ์ได้คะแนนสูงสุด

ประสงคได้คะแนนต่ำสุด

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนทั้งหมดเท่ากับ 72 คะแนน

ผลรวมของคะแนนของนักเรียน 8 คน ที่อยู่ระหว่างคะแนนของประสิทธิ์และประสงคเท่ากับ 582

สัมประสิทธิ์ของพิสัยของคะแนนเท่ากับ $\frac{10}{23}$

ประสิทธิ์ได้คะแนนมากกว่าประสงคกี่คะแนน

4. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยค่าสังเกต 6, 5, 4, 3, 7, 3, 4 และ a ถ้าให้ x_i คือค่าสังเกตตัวที่ i ของข้อมูลชุดนี้ และ $\sum_{i=1}^8 (x_i - M)^2$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $M = 4$ แล้ว ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 : จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ให้ x_1, x_2, \dots, x_{10} เป็นข้อมูล 10 จำนวนดังนี้ 2, 4, 6, 7, a, b, 12, 12, 12, 19 โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq b$ ถ้าฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ b และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 9.5 แล้ว $\sum_{i=1}^{10} |x_i - c|$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ c มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 9.0 2) 9.5 3) 10.0 4) 10.5

2. เด็กกลุ่มหนึ่ง 5 คน มีอายุดังนี้ 1, 3, 4, 7, 10 ปี อีก 6 ปีต่อมาอายุของเด็กกลุ่มนี้จะมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{\sqrt{10}}{11}$ 2) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 4) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

3. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง ซึ่งมีนักเรียนชาย 25 คน และนักเรียนหญิง 15 คน ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของนักเรียนชายเท่ากับ 38 และ 12 คะแนนตามลำดับ

ถ้านายกวีสอบได้คะแนนมาตรฐานเท่ากับ 2 เมื่อเทียบกับกลุ่มนักเรียนชายและเท่ากับ 1.5 เมื่อเทียบกับนักเรียนทั้งห้อง โดยที่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานทั้งห้องเท่ากับ 14 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 32 คะแนน 2) 35 คะแนน 3) 38 คะแนน 4) 41 คะแนน

4. จากตารางการแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
46-55	4
56-65	x
66-75	y
76-85	10
86-95	7
96-105	3

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $Q_1 = 65.5$ และมีฐานมีค่าเท่ากับ 75.5 แล้ว ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 5 2) 10 3) 15 4) 20



12. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 20 คน เป็นดังนี้

กิติ สอบได้ 35 คะแนน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบทั้งหมดเท่ากับ 60 คะแนน ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียน 19 คน ที่ไม่นับรวมกิติเท่ากับ 2.5 แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบชุดนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 4 2) 6 3) 8 4) 10

เฉลย

ตอนที่ 1

1. 8.5 2. 0.5 3. 60 4. 4

ตอนที่ 2

1. 4) 2. 1) 3. 4) 4. 2) 5. 1) 6. 2) 7. 4) 8. 2) 9. 1) 10. 3)
11. 4) 12. 4)

